MATE PLUS

Editor: Călin Vlasie

Redactare: Cristina Miron, Bianca Vișan
Tehnoredactare: Mioara Benza
Design copertă: Ionuţ Broştianu

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Teme Supliment Gazeta Matematică : clasa a 8-a / coord.: Radu Gologan,
Ion Cicu, Alexandru Negrescu, ... - Piteşti : Cartea Românească
Educaţional, 2018
Index
ISBN 978-606-94581-7-4

I. Gologan, Radu (coord.)
II. Cicu, Ion (coord.)
III. Negrescu, Alexandru (coord.)

51

Grupul editorial Cartea Românească

www.cartearomaneasca.ro

Radu Gologan, Ion Cicu, Alexandru Negrescu
(coordonatori)
Valeriu Gornoavă Daniela Vlaicu

Teme Supliment Gazeta Matematică

clasa a VIII-a

(2008-2015)

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

CUPRINS

Partea a IV-a. COMBINATORICĂ

Prefață

Îmi place să reafirm, ori de câte ori am ocazia, că *Gazeta Matematică* este un monument al culturii românești. Nu numai pentru că apare neîntrerupt din 1895 și nici măcar războaiele mondiale nu i-au oprit prezența în viața elevilor, dar o pleiadă întreagă de intelectuali români, nu neapărat deveniţi matematicieni, și-au făcut ucenicia minții cu problemele *Gazetei*.

În anii 1920, succesul național al revistei a făcut ca diriguitorii ei să ia decizia de a înființa un supliment cu exerciții accesibil elevilor cu drag de matematică. Așa au apărut primele liste de rezolvitori, fapt care continuă și azi.

În 2008, inspirându-ne din ideea înaintașilor, am reînființat Suplimentul *Gazetei Matematice*. El s-a vrut **un accesoriu pentru elevii cu performanțe peste medie și nu neapărat olimpici.** În plus, nu am pretins ca problemele să fie originale; importantă în Supliment este informația matematică.

Iată că acum, după 10 ani, realizăm că ideea a fost excelentă. Cele nouă volume, cu problemele din Supliment destinate elevilor din clasele IV-XII, dovedesc acest lucru. Sunt convins că vor avea succes și vor fi utile în educația matematică românească. Personal am un minunat sentiment de mulțumire când aud că problemele din Supliment sunt frumoase, utile și creează minți ascuțite.

Prof. univ. dr. Radu Gologan

Președintele Societății de Științe Matematice din România

PARTEA I

ARITMETICĂ
TEORIA NUMERELOR

Capitolul I.1
NUMERE PRIME. NUMERE COMPUSE

1. Determinaţi numerele naturale a pentru care numărul $a^2 - 16a + 39$ este prim.

Răzvan Ceucă, elev, Iaşi **(S:E11.36)**

2. Determinaţi numerele prime p pentru care $p + 2$ şi $p^2 + 4p - 32$ sunt simultan numere prime.

Mihaela Berindeanu, Bucureşti **(S:E15.233)**

3. Arătaţi că numărul $A = 2^{2010} + 5^{2011}$ nu este număr prim.

* * * **(S:E11.175)**

4. Demonstraţi că numărul $\underbrace{999...9}_{2011\text{ cifre}} + 1\underbrace{999...9}_{1005\text{ cifre}}\underbrace{000...0}_{1005\text{ cifre}}$ este compus.

Neculai Stanciu, Buzău **(S:E14.152)**

5. Fie numerele prime a, b, c mai mari decât 3. Arătaţi că $a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}$ este divizibil cu 3, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Costel Drăgoi, Remeţi, Maramureş **(S:E09.276)**

6. Determinaţi numerele prime de forma $n^4 + 4$, unde n este număr natural.

Ion Pârşe **(S:E10.305)**

7. Determinaţi numerele prime a şi b ştiind că avem relaţia $5a + b = 5(132 - a^2) + 2$.

Veronica Ţucă şi *Gheorghe Ţucă*, Alexandria **(S:E12.420)**

8. Arătaţi că nu există două numere prime astfel încât suma cuburilor lor să fie egală cu cubul mediei lor aritmetice.

Ionuţ Mazâlu, Brăila **(S:E14.31)**

9. Cercetaţi dacă există numere naturale nenule x, y, z cu x, y numere prime, astfel încât $4\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = 6\sqrt{z}$.

Constantin Nicolau, Curtea de Argeş **(S:E13.319)**

10. Fie p un număr prim. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{p^2}.$$

Lucian Tuţulescu, Craiova **(S:E13.198)**

Capitolul I.2
DIVIZIBILITATE

1. Fie $N = 2a^2 + 3a - 7$, unde a este număr întreg. Determinaţi forma lui a pentru care N este divizibil cu 5.

$\boxed{\textit{Constantin Apostol}}$, Rm. Sărat **(S:E15.33)**

2. Se consideră numărul $S = 9^k + 9^{k+1} + 9^{k+2} + ... + 9^{k+98}$, $k \in \mathbb{N}$. Găsiţi restul împărţirii numărului S la 91.

Nicolae Chiriac, Ulmeni **(S:E09.35)**

3. Arătaţi că numărul $A = n^2 + 2n - 1$ nu se divide cu 3, oricare ar fi n număr întreg.

$\boxed{\textit{Constantin Apostol}}$, Rm. Sărat **(S:E13.31)**

4. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia: $13x + y^2 = 2015$.

Vasile Solovăstru, Năsăud **(S:E15.195)**

5. Arătaţi că numărul $A = 550^n - 75^n - 418^n$, unde $n \in \mathbb{N}$, este divizibil cu 57.

Delia Ioana Andrei, elevă, Iaşi **(S:E09.315)**

6. Arătaţi că numărul $A = 2n^3 + n + 6$ se divide cu 3, oricare ar fi n număr întreg.

Luca Tuţă, Buzău **(S:E14.117)**

7. Se consideră numărul $n = 2^{2013} + 3^{2013} + 4^{2013}$.

a) Aflaţi restul împărţirii lui n la 5.

b) Arătaţi că $9 \mid n$.

Ionel Tudor, Călugăreni şi *Viorica Dogaru*, Oinacu, Giurgiu **(S:E14.77)**

8. Arătaţi că numărul $A = 300^n - 105^n - 286^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, este divizibil cu 91.

Marin Chirciu, Piteşti **(S:E10.233)**

9. Arătaţi că numărul $2010^{2011} - 2010$ este divizibil cu 2011.

George Ionescu, Bolintin Vale **(S:E10.265)**

10. Arătaţi că numărul

$$N = (n \cdot 39^n - n \cdot 20^n) \cdot (n \cdot 107^n - n \cdot 54^n + 107^n - 54^n)$$

este divizibil cu 2014, oricare ar fi n număr natural.

Gheorghe Iacob, Paşcani **(S:E15.73)**

11. Aflaţi restul împărţirii numărului $6^{7^{2013}}$ la 43.

Grigore Dumitru, Măcin **(S:E13.193)**

12. Demonstraţi că $3^{3^{2013}} + 1$ şi $3^{3^{2013}} + 10$ sunt numere prime între ele.

Ana Poştaru, Timişoara **(S:E13.157)**

Capitolul I.3
PĂTRATE PERFECTE. CUBURI PERFECTE

1. Scrieţi 60 ca pe o sumă de trei cuburi corespunzătoare la trei numere întregi diferite.

Gabriel Vrânceanu **(S:E10.353)**

2. Determinaţi două numere naturale consecutive, formate din câte trei cifre, ştiind că fiecare dintre ele este egal cu suma cuburilor cifrelor sale.

Aurel Doboşan, Lugoj **(S:E10.226)**

3. Arătaţi că numărul:

$$a=(2\underbrace{00...0}_{2009\text{ ori}})^2+(2\underbrace{00...0}_{2008\text{ ori}}1)^2+(2\underbrace{00...0}_{2009\text{ ori}})^2\cdot(2\underbrace{00...0}_{2008\text{ ori}}1)^2$$

este pătrat perfect.

Gheorghe Achim, Mizil, Prahova **(S:E09.236)**

4. Arătaţi că numărul $a = 10000000002000000000 - 1$ nu este pătrat perfect.

Camelia Vlăduţu, Bucureşti **(S:E08.98)**

5. Numerele reale x, y, z verifică relaţiile:

$$4x\sqrt{2} - 3y^2 + 1 = 0,\ 6y\sqrt{3} - 6z^2 + 18 = 0 \text{ şi } 12z\sqrt{6} - 2x^2 - 68 = 0.$$

Arătaţi că $\dfrac{4x}{\sqrt{2}}+\dfrac{5y}{\sqrt{3}}+\dfrac{7z}{\sqrt{6}}$ este un număr natural, pătrat perfect.

Vasile Scurtu, Bistriţa **(S:E14.320)**

6. Determinaţi numerele naturale x astfel încât $\sqrt{x+\sqrt{x}} \in \mathbb{N}$.

Dorinel Anca, Târgovişte **(S:E09.79)**

7. Determinaţi numerele naturale n pentru care $3n + 4$ şi $5n + 1$ sunt pătrate perfecte consecutive.

D. Grigore, Măcin, Tulcea **(S:E14.75)**

8. Aflaţi toate numerele naturale de forma $\overline{abcd}$, în baza 10, cu $a \neq 0$ şi $c \neq 0$, astfel încât $\sqrt{\overline{abcd}}-\sqrt{\overline{cd}}=\overline{ab}$.

Alexandru Funduianu, Botoşani **(S:E13.273)**

9. Aflaţi n număr natural pentru care $\dfrac{\sqrt{7}+2\sqrt{n}}{2\sqrt{7}-\sqrt{n}}$ este număr întreg.

Susana Costea, Sâncel, Alba **(S:E11.295)**

10. Determinaţi numerele întregi a astfel încât numărul $a^2 - 13a + 36$ să fie pătratul unui număr întreg.

Rudi Pasici, Brăila **(S:E10.32)**

11. Determinaţi numerele naturale pătrate perfecte de forma $4n^2 - 15$, $n \in \mathbb{N}$.

Vasile Solovăstru, Năsăud **(S:E10.231)**

12. Aflaţi toate numerele naturale x pentru care $x + 2014$ este pătrat perfect, iar $x + 14$ este puterea a patra a unui număr natural.

Vasile Berghea, Avrig **(S:E14.73)**

PARTEA a II-a

ALGEBRĂ

Capitolul II.1
MODULUL UNUI NUMĂR REAL

1. Rezolvaţi ecuaţia: $|\,1 - |\,x - 1\,| - x\,| = 2$.

Aurel Ene, Râmnicu-Vâlcea **(S:E09.280)**

2. Calculaţi $\{x \in \mathbb{R} \mid |\,3x - 1\,| \leq 12\} \cap \mathbb{Z}$.

* * * **(S:E12.659)**

3. Dacă x, y, z sunt numere întregi astfel încât

$$x^2 \leq 2x + y - z,\ y^2 \leq 2y + z - x \text{ şi } z^2 \leq 2y + x - y,$$

aflaţi x, y, z.

Mariana Fleancu, Câmpulung **(S:E13.357)**

4. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$|\,x - 1\,| + |\,x - 2\,| + |\,x - 3\,| + \ldots + |\,x - 100\,| = x - 100.$$

Elisabeta Deneş, Beclean **(S:E13.79)**

5. Dacă $a \in [-1, 2]$, iar b este număr real astfel încât $2b = a + 1$, arătaţi că:

$$\sqrt{(a+1)^2 + 12b^2} - \sqrt{(a-2)^2 + 3(2b-3)^2} < 7.$$

* * * **(S:E11.136)**

6. Rezolvaţi inecuaţia:

$$\frac{|x| + |x-4|}{|x-2|} + 1 \leq x - 3,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Vasilica Dilimoţ-Niţă, Bucureşti **(S:E09.116)**

7. Fie x, y numere reale astfel încât $x \in (1, 2)$ şi $y \in (2, 3)$. Arătaţi că:

$$2xy - 5x - 3y + 7 < 0.$$

* * * **(S:E11.251)**

8. Arătaţi că, oricare ar fi numărul real x, are loc inegalitatea:

$$|\,x - 1^2\,| + |\,x - 2^2\,| + |\,x - 3^2\,| + \ldots + |\,x - 2015^2\,| \geq |\,x - 2015 \cdot 1008\,|.$$

George-Florin Şerban, Brăila **(S:E15.273)**

Capitolul II.2
PARTEA ÎNTREAGĂ ŞI PARTEA FRACŢIONARĂ

1. Determinaţi cifra sutelor din scrierea în baza de numeraţie zecimală a numărului:

$$N=\left[\sqrt{1}\right]\cdot 1+\left[\sqrt{2}\right]\cdot 2+\left[\sqrt{2^2}\right]\cdot 2^2+\left[\sqrt{2^3}\right]\cdot 2^3+\left[\sqrt{2^4}\right]\cdot 2^4,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a.

Roxana Murea, Brăila **(S:E10.27)**

2. Arătaţi că $\left[\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}\right]=9$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului x.

* * * **(S:E08.92)**

3. Considerăm numărul real $x_n=\sqrt{n^2+5n+6}$ cu $n\in\mathbb{N}$. Calculaţi partea întreagă a lui x_n.

Cristian Olteanu **(S:E10.346)**

4. Fie n un număr natural şi $A=\sqrt{n^2+3n+2}$. Aflaţi partea întreagă a lui A.

Maria Both, Arad **(S:E12.575)**

5. Arătaţi că numărul $a=2n^2+\left[\sqrt{4n^2+n}\right]+1$, unde n este număr natural nenul, poate fi scris ca sumă a două pătrate perfecte. Am notat $[x]$ partea întreagă a numărului x.

Alessandro Ventullo, Milano, Italia **(S:E15.354)**

6. Aflaţi partea întreagă a numărului

$$A=\frac{1}{\left[1\sqrt{2}\right]}+\frac{1}{\left[2\sqrt{5}\right]}+\frac{1}{\left[3\sqrt{10}\right]}+\ldots+\frac{1}{\left[n\sqrt{n^2+1}\right]}.$$

Victor Săceanu, Drobeta-Turnu Severin **(S:E13.195)**

7. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia:

$$\left[\frac{2x-7}{5}\right]=2009,$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

Mircea Mario Stoica, Arad **(S:E09.282)**

8. Rezolvaţi ecuaţia:

$$[9+x]+2\{x\}=2009,$$

unde $[a]$ şi $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a lui a.

Roxana Murea, Brăila **(S:E10.28)**

9. Rezolvaţi ecuaţia:

$$|x-2010|+[x+2009]=4019,$$

unde $|a|$ reprezintă modulul numărului a, iar $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a.

Dan Negulescu, Brăila **(S:E10.29)**

PARTEA a III-a

GEOMETRIE

Capitolul III.1
CONFIGURAŢII DE PUNCTE, DREPTE, PLANE

1. O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are latura bazei egală cu $4\sqrt{2}$ m şi muchia laterală $4\sqrt{13}$ m. Când soarele se află în planul ACV o rază care trece prin V formează cu planul bazei un unghi cu măsura de $60°$. Aflaţi aria umbrei pe care piramida o lasă pe pământ (planul bazei).

* * * **(S:E11.137)**

2. Dreptunghiurile $ABCD$ şi $ABEF$ sunt situate în plane diferite şi $AF = 2$ cm, iar $BC =$ $= 6$ cm. Determinaţi poziţia punctului $P \in (AB)$ astfel încât $FP + PC$ să fie minim.

* * * **(S:E08.99)**

3. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare, E mijlocul lui (AB), F mijlocul lui (CD), M mijlocul lui (BC), N mijlocul lui (EF). Demonstraţi că

$$MN < \frac{AC + BD}{4}.$$

Geanina Dumitraşcu, Brăila **(S:E14.235)**

Capitolul III.2
PARALELISM ÎN SPAŢIU. UNGHIUL A DOUĂ DREPTE

1. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât $(DA) \equiv (DB)$ şi G mijlocul segmentului DC. Dacă $M \in (AG)$ şi $N \in (BG)$ astfel încât $\sphericalangle ADM \equiv \sphericalangle GDM$ şi $\sphericalangle BDN \equiv \sphericalangle GDN$, arătaţi că $MN \parallel (ABC)$.

* * * **(S:E08.93)**

2. Punctul P este exterior planului patrulaterului $ABCD$. Fie $M \in AC$ şi $N \in BD$ astfel încât $BC \parallel (PMD)$ şi $AD \parallel (PCN)$. Demonstraţi că $MN \parallel (PAB)$.

Sergiu Prisecariu, Iaşi **(S:E11.34)**

3. Într-un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ se cunosc muchiile $AB = 2\sqrt{3}$ cm, $BC = 2\sqrt{6}$ cm, $AA' = 3\sqrt{2}$ cm. Punctele M şi N sunt mijloacele muchiilor $B'C'$, respectiv $A'D'$.

a) Demonstraţi că planele $(AA'M)$ şi $(CC'N)$ sunt paralele.

b) Determinaţi măsura unghiului dintre dreptele AM şi CN.

Florentina Ene, Bucureşti **(S:E12.651)**

4. Într-un cub $ABCDA'B'C'D'$ fie M mijlocul muchiei AA' şi $N \in (BB')$ astfel încât $B'N = 3BN$. Dacă MN se intersectează cu AB în P, aflaţi măsura unghiului format de dreptele PC şi $C'B$.

Cristian Şendroiu, Câmpina **(S:E08.138)**

5. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, punctele M, N, respectiv P sunt mijloacele muchiilor CC', $A'D'$, respectiv $C'D'$. Aflaţi o funcţie trigonometrică a unghiului format de dreptele BM şi NP.

* * * **(S:E13.315)**

Capitolul III.3
PERPENDICULARITATE ÎN SPAŢIU

1. Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara AP astfel încât să avem: $AP = 12a$, $CP = 13a$ şi $BC = 4a$, unde a este un număr real pozitiv.

a) Calculaţi AB.

b) Demonstraţi că ΔPBC este dreptunghic.

c) Aflaţi a dacă perimetrul ΔPAC este de 9 cm.

Alexandru Stanciu, Ploieşti **(S:E08.139)**

2. Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$ şi $AB + CD = AD$. Pe planul $(ABCD)$ se ridică perpendiculara în punctul A pe care se ia punctul M. Fie N mijlocul lui BC. Arătaţi că $MN \perp DN$.

*** **(S:E08.176)**

3. Fie D un punct situat pe latura BC a triunghiului echilateral ABC, astfel încât $2 \cdot CD = BD$, iar E mijlocul lui AD. Se ridică perpendiculara ME pe planul (ABC). Aflaţi lungimea segmentului ME, astfel încât triunghiul ABM să fie isoscel.

Mariana Mitea, Cugir **(S:E11.74)**

4. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de lungime $2a$. Determinaţi poziţia punctului $M \in (BB')$ pentru care $(D'AC)$ şi (MAC) sunt plane perpendiculare.

Eugeniu Blăjuţ, Bacău **(S:E15.360)**

5. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ construim $C'N \perp BD'$. Notăm cu M mijlocul lui $[D'C']$ şi cu O intersecţia lui BC' cu $B'C$.

a) Arătaţi că $ON \perp MN$.

b) Dacă $AB = a$, aflaţi distanţa dintre dreptele $B'C$ şi MN.

Vasilica Dilimoţ-Niţă, Bucureşti **(S:E09.115)**

6. Precizaţi cât la sută din volumul unui cub care are distanţa dintre o diagonală a sa şi o diagonală a unei feţe (cu care nu se intersectează) egală cu $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ reprezintă volumul unui cub cu latura a.

Ciprian Cipariu, Blaj **(S:E11.73)**

7. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ punctele E şi F sunt proiecţiile punctului A pe $A'B$, respectiv $A'C$. Demonstraţi că $\Delta A'EF \sim \Delta A'CB$ şi că triunghiul AEF este dreptunghic.

Ion Voicu, Răduleşti, Ialomiţa **(S:E15.80)**

8. Pe planul rombului $ABCD$ cu $m(\sphericalangle BAD) = 60°$ şi $AB = a$ cm, de aceeaşi parte a planului se ridică perpendicularele AP şi CQ. Fie $M \in (BP)$ astfel încât $PB = 5 \cdot MB$, $N \in (PD)$ astfel încât $MN \parallel BD$ şi $AP = a\sqrt{3}$ cm.

a) Arătaţi că $(AMN) \perp (BDP)$.

b) Calculaţi lungimea segmentului $[CQ]$ astfel încât $(AMN) \parallel (BDQ)$.

Valeriu Romul Pop, Baia Mare **(S:E09.37)**

9. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă dreaptă cu bazele pătrate. Arătaţi că $ABCDA'B'C'D'$ este cub dacă şi numai dacă $A'C \perp AD'$.

Ion Voicu, Răduleşti, Ialomiţa **(S:E14.197)**

10. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic, O centrul feţei $ABCD$ şi $M \in$ $\in (BD')$ astfel încât $\dfrac{BM}{MD'} = \dfrac{1}{2}$. Demonstraţi că, dacă OM este perpendiculara comună a dreptelor BD' şi AC, atunci paralelipipedul este cub.

Marin Grigori, Buzău **(S:E09.197)**

11. În prisma triunghiulară dreaptă $ABCA'B'C'$ avem $AA' = 4\sqrt{2}$ cm şi $AB = 8$ cm. Demonstraţi că $BC' \perp AB'$.

Eugen Predoiu şi *Adrian Mărculescu*, Călăraşi **(S:E12.413)**

12. Se dă triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 120°$. Fie $MA \perp (ABC)$ şi N mijlocul segmentului BC. Demonstraţi că $MN \perp AC$ dacă şi numai dacă $AB = 2AC$.

Luca Tuţă, Buzău **(S:E14.120)**

13. Demonstraţi că într-un punct al spaţiului nu pot fi construite patru drepte distincte, oricare două perpendiculare.

Gabriel Vrânceanu **(S:E10.349)**

14. Dacă un punct este simultan extremitate a mai multor segmente, îl vom numi colţ, iar dacă dreptele segmentelor unui colţ sunt perpendiculare două câte două, vom spune că acesta este colţ drept. Arătaţi că:

a) o piramidă nu poate avea mai mult de un singur colţ drept;

b) dacă vârful unei piramide este colţ drept, atunci piramida este tetraedru.

Silviu Boga, Iaşi **(S:E09.321)**

15. Fie $ABCDMNPQ$ un cub, $AB = 1 + \sqrt{2}$ cm, $[BT$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle CBP$, $T \in$ $\in (CP)$, $S \in (DQ)$ astfel încât $SD = 2$ cm. Dacă $BS \cap NQ = \{U\}$ şi $UT \cap (ABC) = \{R\}$, calculaţi BR.

Daniela Stănică şi *Cătălin Stănică*, Brăila **(S:E15.280)**

16. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ punctele G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor $AA'B$, $BB'C'$ şi $A'D'C'$. Dacă $G_1G_2 \cap (ABC) = \{S\}$, $G_1G_3 \cap (ABC) = \{T\}$ şi $AB = 6$ cm, calculaţi aria triunghiului AST.

Daniela Stănică şi *Cătălin Stănică*, Brăila **(S:E15.276)**

17. Arătaţi că într-o piramidă patrulateră regulată două feţe laterale opuse sunt perpendiculare dacă şi numai dacă unghiul dintre două feţe laterale alăturate are măsura de 120°.

Ion Tudor, Băbana, Argeş **(S:E15.359)**

PARTEA a IV-a

COMBINATORICĂ

Capitolul IV.1
PROBLEME DE NUMĂRARE

1. Un cub din aluminiu cu muchia de n dm ($n \in \mathbb{N}$) este vopsit în roşu. Se taie cubul astfel încât să se obţină un număr maxim de cubuleţe cu muchia de 1 dm şi se pun într-o urnă.

a) Ştiind că probabilitatea de a extrage un cubuleţ fără feţe colorate este $\frac{8}{27}$, aflaţi n.

b) În condiţiile de la punctul a), care este probabilitatea de a extrage un cubuleţ cu două feţe colorate?

Alexandru Loga, Cugir **(S:E11.80)**

2. Aflaţi numerele întregi a, b, c, d, e astfel încât $|a-b| = |b-c| = |d-e| = |e-a|$ şi $abcde = 1$.

Daniel Sitaru, Drobeta-Turnu Severin **(S:E13.351)**

3. Arătaţi că, oricare ar fi 12 puncte din interiorul unui tetraedru de volum V, există cel puţin patru printre acestea şi vârfurile tetraedrului care determină un corp de volum cel mult $\frac{V}{37}$.

Liviu Vlaicu, Zalău, Concursul „Grigore C. Moisil", 1991

Capitolul IV.2
PRINCIPIUL LUI DIRICHLET

1. Arătaţi că oricum am alege 126 de puncte în interiorul unui cub cu latura de 25 cm, cel puţin două dintre ele sunt situate la o distanţă mai mică sau egală cu $5\sqrt{3}$ cm.

Aurica Ştiru, Baia Mare **(S:E12.453)**

2. Arătaţi că orice poliedru convex are cel puţin două feţe cu acelaşi număr de laturi

* * *

3. Se consideră şase puncte în spaţiu, oricare patru necoplanare şi se colorează cu roşu sau albastru fiecare segment determinat de două dintre aceste puncte. Arătaţi că există trei puncte printre acestea care determină un triunghi cu laturile la fel colorate.

* * *

INDICAŢII ŞI SOLUŢII

PARTEA I. ARITMETICĂ. TEORIA NUMERELOR

CAPITOLUL I.1. NUMERE PRIME. NUMERE COMPUSE

1. (S:E11.36) $N = a^2 - 16a + 39 = (a - 3)(a - 13)$. Cum N este prim, trebuie ca $a - 3 =$ $= 1$ sau $a - 3 = -1$ sau $a - 13 = 1$ sau $a - 13 = -1$. Rezultă $a \in \{4, 2, 14, 12\}$. Convin $a = 2$ şi $a = 14$.

2. (S:E15.233) $A = p + 2$ şi $B = p^2 + 4p - 32 = (p - 4)(p + 8)$; B este prim $\Rightarrow p - 4 =$ $= 1 \Rightarrow p = 5$, de unde $A = 7$, $B = 13$ (dacă $p - 4 = -1$, obţinem $B = -11$, nu convine; dacă $p + 8 = 1$, obţinem $p = -7$, nu convine; dacă $p + 8 = -1$, obţinem $p = -9$, nu convine). Aşadar, $p = 5$ este unica soluţie a problemei.

3. (S:E11.175) $A = 2^{2010} + 5^{2011} = (3 - 1)^{2010} + (6 - 1)^{2011} = \mathcal{M}_3 + 1 + \mathcal{M}_6 - 1 = \mathcal{M}_3$. Deci A este multiplu de 3, $A > 3$, de unde A nu este prim.

4. (S:E14.152) Dacă $N \in \mathbb{N}^*$ este numărul din enunţ, atunci $N = N_1 + N_2$, unde $N_1 =$ $= \underbrace{999...9}_{2011 \text{ cifre}} = 10^{2011} - 1$ şi $N_2 = 1\underbrace{999...9}_{1005 \text{ cifre}}\underbrace{000...0}_{1005 \text{ cifre}} = 1 \cdot 10^{2010} + 9(10^{2009} + 10^{2008} + ...\ 10^{2005}) =$ $= 10^{2010} + 9 \cdot \dfrac{10^{2010} - 10^{1005}}{10 - 1}$, deci $N_2 = 2 \cdot 10^{2010} - 10^{1005}$. Avem $N = N_1 + N_2 = 10^{2011} -$ $- 1 + 2 \cdot 10^{2010} - 10^{1005} = 10^{2010}(10 + 2) - 10^{1005} - 1$, deci $N = 12 \cdot 10^{2010} - 10^{1005} - 1$ şi cu notaţia $10^{1005} = a$ obţinem $N = 12a^2 - a - 1 = (3a - 1)(4a + 1)$. Aşadar $N = (3 \cdot$ $\cdot 10^{1005} - 1)(4 \cdot 10^{1005} + 1)$, adică N este număr compus.

5. (S:E09.276) Cum a, b, c sunt numere prime mai mari decât 3, atunci $a, b, c \in$ $\in \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{N}^*\}$, de unde $a^2, b^2, c^2 \in \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{N}^*\}$, de unde încă $a^{2n}, b^{2n}, c^{2n} \in \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. Deci $a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}$ este divizibil cu 3.

6. (S:E10.305) $n^4 + 4 > 2$, $\forall\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^4 + 4$ este număr natural impar $\Rightarrow n$ număr natural impar. $n = 1 \Rightarrow n^4 + 4 = 1 + 4 = 5$ număr prim. $n = 5 \Rightarrow n^4 + 4 = 629$ număr prim. Pentru $n = 5k + 1$, $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow U(n^4 + 4) \in \{0, 5\} \Rightarrow n^4 + 4 \,\vdots\, 5 \Rightarrow n^4 + 4$ nu este număr prim. Pentru $n = 5k + 3$, $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow U(n^4 + 4) \in \{0, 5\} \Rightarrow n^4 + 4 \,\vdots\, 5 \Rightarrow n^4 + 4$ nu este număr prim. Pentru $n = 5k + 2$, $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow U(n^4 + 4) \in \{0\} \Rightarrow n^4 + 4 \,\vdots\, 5 \Rightarrow n^4 + 4$ nu este număr prim. Pentru $n = 5k + 4$, $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow U(n^4 + 4) \in \{0\} \Rightarrow n^4 + 4 \,\vdots\, 5 \Rightarrow n^4 +$ $+ 4$ nu este număr prim. Atunci $n^4 + 4 \in \{5, 629\}$.

7. (S:E12.420) Relaţia dată se scrie $5a(a + 1) + b = 662$. Dar $a(a + 1)$ număr par şi 662 par $\Rightarrow b$ par, dar b prim $\Rightarrow b = 2$. Atunci $5a(a + 1) = 660 \Rightarrow a\,(a + 1) = 132 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = 11$, $(a, b) \in \{(11, 2)\}$.