ARTUR BĂLĂUCĂ

ARITMETICĂ ALGEBRĂ GEOMETRIE

TEME PENTRU CENTRE DE EXCELENŢĂ

+

234

MODELE DE PROBLEME REZOLVATE

+

1307

DE PROBLEME SEMNIFICATIVE

PENTRU

OLIMPIADE, CONCURSURI

ŞI

CENTRE DE EXCELENŢĂ

CLASA A VI-A

EDIŢIA A IX-A

EDITURA TAIDA

IAŞI

Cuprins

Programa Olimpiadei de Matematică

• În programa de olimpiadă sunt incluse, în mod implicit, conținuturile programelor de olimpiadă pentru disciplina matematică din clasele anterioare.
• În programa prevăzută pentru etapa națională sunt incluse, în mod implicit, conținuturile programelor de olimpiadă de la etapele anterioare
• Conținuturile suplimentare față de programa școlară, marcate cu text înclinat în prezenta programă, pot fi folosite în rezolvarea problemelor de olimpiadă

ALGEBRĂ

Etapa județeană

1. Mulțimi

• Submuţimi. Cardinalul unei mulțimi. Operații cu mulțimi. Mulțimi finite și mulțimi infinite. *Principiul includerii și excluderii. Partiții. Principiul cutiei.*
• Mulțimea $\mathbb{N}$. Teorema fundamentală a aritmeticii. C.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.. Proprietăți.
• $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$
• Dacă $(a, b) = d$ atunci există $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $(x, y) = 1$ și $a = dx$, $b = dy$.
• Dacă $[a, b] = m$ atunci există $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $(x, y) = 1$ și $m = ax$, $m = by$.

2. Rapoarte și proporții

• Rapoarte. Proporții. Procente. Șir de rapoarte egale. Mărimi direct și invers proporționale. Regula de trei simplă.
• Elemente de organizare a datelor. Grafice. Reprezentarea datelor cu ajutorul unor softuri matematice. Probabilități.

ALGEBRĂ

CAPITOLUL 1

MULȚIMI

Submulțimi. Cardinalul unei mulțimi. Mulțimi finite și mulțimi infinite. Mulțimea $\mathbb{N}$. Operații cu mulțimi. Principiul includerii și excluderii. Partiții. Principiul cutiei

Reţineţi!

Noţiunile de mulţime şi de element al unei mulţimi fac parte din categoria acelor noţiuni matematice care nu pot fi definite, dar sunt impuse de numeroase exemple:

1) mulţimea cuvintelor din limba română;

2) mulţimea numerelor naturale: *0, 1, 2, 3,...* etc;

3) mulţimea băncilor din clasă. Aşa cum arăta **Cantor**, creatorul teoriei mulţimilor, o mulţime este „o colecţie de obiecte (numite elementele mulţimii) de natură oarecare, bine determinate şi bine distincte”.

Există două moduri de determinare a unei mulţimi.

a) enumerând individual elementele sale.

b) specificând o proprietate pe care o au elementele sale şi nu le au alte elemente. Mulţimile definite în acest mod se vor nota prin A = $\{x/\mathscr{P}(x)\}$, adică mulţimea acelor obiecte x, pentru care are loc proprietatea $\mathscr{P}(x)$.

O mulţime definită după primul mod se zice că este dată sintetic, iar o mulţime definită în al doilea mod este dată analitic.

Reţineţi!

1. O mulţime care are un număr finit de elemente se zice *finită*. În caz contrar se numeşte *infinită*.

2. În teoria mulţimilor se admite existenţa unei mulţimi care nu are nici un element; aceasta se numeşte mulţime *vidă* şi se notează cu simbolul Φ.

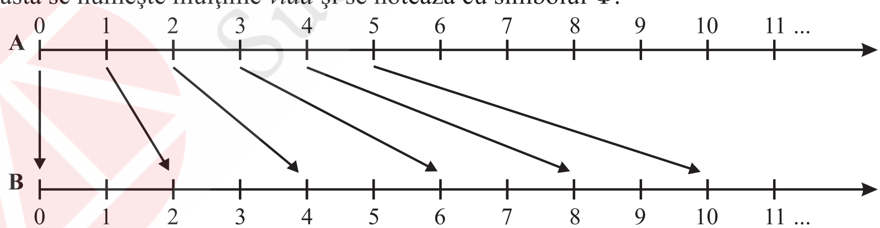


Diagrama de mai sus sugerează faptul că mulțimea numerelor naturale cât și mulțimea numerelor naturale pare este infinită.

Mulţimi egale

Reţineţi!

Se spune că mulţimea A este egală cu o mulţime B dacă orice element al mulţimii A aparţine şi mulţimii B şi reciproc.

Avem $76^{63} + 66^{53} = (76^{63} - 5^{63}) + (66^{53} + 5^{53}) + (5^{63} - 5^{53}) = (76 - 5)(76^{62} + 76^{61} \cdot 5 + ... + $
$+ ... + 76 \cdot 5^{61} + 5^{62}) + (66 + 5)(66^{52} - 66^{51} \cdot 5 + ... - 66 \cdot 5^{51} + 5^{52}) + 5^{53}(5^{10} - 1) =$
$= M_{71} + 5^{53}(5^{10} - 1)$. Însă $5^{10} - 1 = (5^5 - 1)(5^5 + 1) = (5 - 1)(5^4 + 5^3 + 5^2 + 5 + 1) \cdot (5^5 + 1) =$
$= 4 \cdot 781 \cdot (5^5 + 1) = 4 \cdot 71 \cdot 11 \cdot (5^5 + 1) = M_{71}$.

2. Se știe că numărul A = $\overline{aabbcccc}$ este pătrat perfect cu $a \neq b \neq c \neq a$.

a) Arătați că 121 / A.

b) Determinați toate numerele A cu proprietatea de mai sus.

(Concursul „Florica T.Câmpan, etapa județeană, Iași, 2012, Cristian Lazăr)

Rezolvare:

a) Cazul $c \neq 0$.

$A = \overline{aa} \cdot 10^6 + \overline{bb} \cdot 10^4 + \overline{cc} \cdot 10^2 + \overline{cc} = 11(a \cdot 10^6 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^2 + c)$, de unde 11 / A. Cum 11 este număr prim rezultă 11^2 / A. Dacă $c = 0$, atunci $A = 10^4 \cdot (\overline{aa} \cdot 10^2 + \overline{bb}) =$
$= 10^4 \cdot 11 \cdot (a \cdot 10^2 + b)$ etc.

b) A pătrat perfect implică $c \in \{0; 1; 5; 6; 9\}$. Dacă $c \in \{1; 5; 6; 9\}$, atunci A este de forma $4k + 3$ sau $4k + 2$, deci A nu este pătrat perfect.

Să analizăm cazul $c \in \{0; 4\}$.

Dacă $c = 4$, atunci $A = 4 \cdot \left(\overline{aa} \cdot \dfrac{10^6}{4} + \overline{bb} \cdot \dfrac{10^4}{4} + 1111\right) = 4\left(\overline{aa} \cdot 5^6 \cdot 2^4 + \overline{bb} \cdot 5^4 \cdot 2^2 + 1111\right) =$

$= 2^2 \cdot (M_4 + 3)$, deci A nu este pătrat perfect.

A mai rămas că analizăm cazul $c = 0$.

Dacă $c = 0$, atunci $A = \overline{aabb} \cdot 10^4$. Deci este necesar ca numărul $\overline{aabb}$ să fie pătrat perfect.

Dacă $b = 0$, atunci $\overline{aa00} = 100 \cdot \overline{aa}$. Dar $\overline{aa}$ nu este pătrat perfect, oricare ar fi cifra a.

$b = 1$ implică $\overline{aa11} = M_4 + 3$, nu convine.

$b = 4$ implică $\overline{aa44} = \overline{aa} \cdot 100 + 44 = 11(100a + 4) = 11[99a + a + 4]$, de unde $11 / a + 4$. Deci $a = 7$ soluție.

$b \in \{5; 6; 9\}$, conduce la $\overline{aabb}$ este de forma $M_4 + 3$ sau $M_4 + 2$, nu convine.

Prin urmare, A = 77440000 soluție unică.

3. Se știe că numerele $\overline{abc}$ și $\overline{cba}$ scrise în baza zece sunt divizibile cu 7.

Arătați că numărul $n = 6a + 12b + 6c$ este divizibil cu 7.

Rezolvare:

$\overline{abc} = 100a + 10b + c = (98a + 7b) + (2a + 3b + c)$, **(1)**.

$\overline{cba} = 100c + 10b + a = (98c + 7c) + (2c + 3b + a)$, **(2)**.

Din **(1)** și **(2)** rezultă că $7 / 2a + 3b + c$ și $7 / 2c + 3b + a$, de unde $7 / (2a + 3b + c) +$
$+ (2c + 3b + a)$, adică $7 / 3a + 6b + 3c$ și $7 / 2(3a + 6b + 3c)$.

4. Arătați că suma și produsul oricăror cinci numere naturale consecutive, se divide cu 5.

Rezolvare:

Resturile împărțirii a cinci numere naturale consecutive la 5 sunt 0, 1, 2, 3 și 4, nu neapărat în această ordine, adică ele sunt de forma M_5, $M_5 + 1$, $M_5 + 2$, $M_5 + 3$, $M_5 + 4$ nu neapărat în această ordine.

II.4. Numărul divizorilor. Teorema fundamentală a aritmeticii

Reţineţi!

***Teorema fundamentală a aritmeticii*:** Oricare ar fi un număr natural N, cu $N \geq 2$, există o descompunere a sa în produs de numere prime, adică există un număr finit de numere prime $p_1, p_2, ..., p_n$, nu neapărat distincte, astfel încât $N = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$. În plus, această descompunere este unică în sensul că oricare altă descompunere în produs de factori primi diferă de ea doar prin ordinea factorilor.

Reprezentarea $N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_n^{a_n}$, unde $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{N}$ şi $p_1, p_2, ..., p_n$ sunt numere prime, cu $0 < p_1 < p_2 <...< p_n$ se numeşte **descompunerea canonică** a numărului N.

➲ Numărul divizorilor unui număr natural N, ($N \neq 0$) scris sub forma canonică $N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_n^{a_n}$, este egal cu $\tau(N) = (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot ... \cdot (a_n + 1)$.

➲ Suma divizorilor unui număr natural N, ($N \neq 0$) scris sub forma canonică $N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_n^{a_n}$, este egală cu $\sigma(N) = \dfrac{p_1^{a_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \dfrac{p_2^{a_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot ... \cdot \dfrac{p_n^{a_n+1} - 1}{p_n - 1}$.

Reţineţi!

Formula lui Legendre

Exponentul numărului natural prim p din descompunerea canonică a numărului natural N, unde $N = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$ cu $n \in \mathbb{N}$ și $n \geq 2$ este egal cu

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + ... + \left[\frac{n}{p^k}\right] \quad (p^k \leq n < p^{k+1}).$$

$\left(\left[\dfrac{n}{p^i}\right]\right.$ reprezintă partea întreagă a numărului rațional $\dfrac{n}{p^i}$ și este de fapt câtul împărțirii lui n la p^i, $\left. i = \overline{1, k_p}\right)$.

Probleme rezolvate

1. Fie numărul $n = 100!$, adică $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 99 \cdot 100$. Aflați:

a) Exponentul lui 2 din descompunerea în factori a lui n.

b) Exponentul lui 5 din descompunerea în factori a lui n.

c) Exponentul lui 3 din descompunerea în factori a lui n.

d) Arătați că 30^{24} / 100!.

e) Arătați că $30^{25} \nmid 100!$.

Rezolvare:

a) $\left[\dfrac{100}{2}\right] + \left[\dfrac{100}{2^2}\right] + \left[\dfrac{100}{2^3}\right] + \left[\dfrac{100}{2^4}\right] + \left[\dfrac{100}{2^5}\right] + \left[\dfrac{100}{2^6}\right] = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97.$

(am folosit formula lui **Legendre**)

b) $\left[\dfrac{100}{5}\right] + \left[\dfrac{100}{5^2}\right] = 20 + 4 = 24.$

CAPITOLUL 3

RAPOARTE ŞI PROPORŢII

Rapoarte. Proporții. Procente. Șir de rapoarte egale. Mărimi direct și invers proporționale. Regula de trei simplă. Elemente de organizare a datelor. Grafice. Reprezentarea datelor cu ajutorul unor softuri matematice. Probabilități

Procente

Reţineţi!

➲ Aflarea a p % dintr-un număr: $p\ \%$ din $a = \frac{p}{100} \cdot a$.

➲ Aflarea unui număr când cunoaştem p% din el: $\frac{p}{100}$ din $x = a$ implică $x = a : \frac{p}{100}$, de unde $x = \frac{a \cdot 100}{p}$.

➲ Aflarea raportului procentual: $\frac{p}{100}$ din $a = b$ implică $p = \frac{100 \cdot b}{a}$.

➲ Concentraţia unei soluţii = $\frac{\text{masa dizolvantului}}{\text{masa soluției}}$.

Probleme rezolvate

1. Se dizolvă 170 g de zahăr în 80 g de apă. Care este concentraţia soluţiei?

Rezolvare:

concentraţia = $\frac{\text{masa zahărului}}{\text{masa soluției}} = \frac{170}{170+80} = \frac{170}{250} = \frac{^{4/}17}{25} = \frac{68}{100} = 68\%$.

➲ Titlul unui aliaj = $\frac{\text{masa metalului prețios}}{\text{masa aliajului}}$.

2. Titlul unui aliaj care conţine argint este egal cu 0,785. Ce cantitate de argint intră într-un obiect care cântăreşte 200 de grame?

Rezolvare:

Avem: $0{,}785 = \frac{a}{200}$, de unde $a = 0{,}785 \cdot 200 = 157$ de grame.

➲ Dacă rapoartele de numere raţionale $\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; \frac{a_3}{b_3};...;\frac{a_n}{b_n}$ au aceeaşi valoare spunem că ele formează un şir de rapoarte egale.

3. Un obiect care are prețul de 1200 lei se scumpește cu 25%. Cu cât la sută ar trebui să se ieftinească pentru a ajunge la prețul inițial? Generalizare.

(Gazeta Matematică, I. Fota, Izbiceni, 2017)

Rezolvare:

a) După scumpire obiectul costă 1200 lei + $\frac{25}{100}\cdot 1200$ lei = 1500 lei.

$\frac{p}{100}$ din 1500 lei = 1200 lei $\Rightarrow p = \frac{1200\cdot 100}{1500} = 80\%$.

Obiectul trebuie să se ieftinească cu 20%.

b) ***Generalizare***

Un obiect care are prețul de a lei se scumpește cu $p_1\%$. Cu cât la sută ar trebui să se ieftinească obiectul pentru a ajunge la prețul inițial?

Rezolvare:

După scumpire cu $p_1\%$ obiectul costă $\frac{p_1+100}{100}\cdot a$.

După ieftinire avem: $\frac{p}{100}\cdot\left(\frac{p_1+100}{100}\right)\cdot a = a$, de unde $p = \frac{100^2}{p_1+100}$.

Obiectul trebuie să se ieftinească cu $100 - \frac{100^2}{p_1+100} = \frac{p_1\cdot 100}{p_1+100}$.

Cazul particular: $p_1 = 25\%$, obiectul se ieftinește cu: $\frac{25\cdot 100}{125} = 20\%$.

(Soluție dată de Victor-Gabriel Tcaciuc)

Proprietatea fundamentală a unui şir de rapoarte egale

Dacă $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$, atunci $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$.

➲ Spunem că numerele raţionale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt direct proporţionale, respectiv, cu numerele raţionale nenule $b_1, b_2, \ldots, b_n$ dacă putem scrie şirul de rapoarte egale: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$.

➲ Spunem că numerele raţionale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt invers proporţionale, respectiv, cu numerele raţionale nenule $b_1, b_2, \ldots, b_n$ dacă putem scrie şirul de rapoarte egale: $\frac{a_1}{\frac{1}{b_1}}=\frac{a_2}{\frac{1}{b_2}}=\ldots=\frac{a_n}{\frac{1}{b_n}}$ sau $a_1\cdot b_2=\ldots=a_n\cdot b_n$.

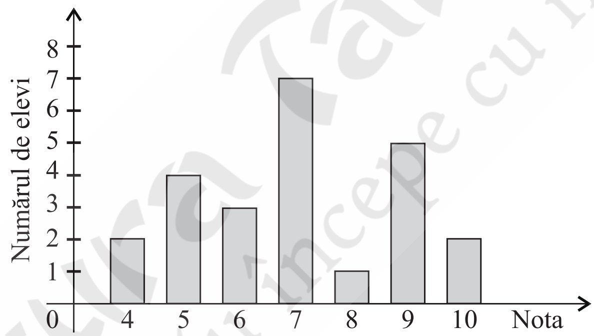
139. Numerele raţionale pozitive $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{20}$ satisfac condiţiile:
(1) $a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{19}$ sunt direct proporţionale cu numerele 1, 3, 5, …, 19;
(2) $a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{20}$ sunt invers proporţionale cu numerele 19, 17, 15, …, 5, 3, 1.
Se consideră numerele $m = \frac{1}{a_1} \cdot (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{19})$ şi $n = a_{20} \cdot \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_6} + \ldots + \frac{1}{a_{20}}\right)$.

a) Arătaţi că m este număr natural pătrat perfect. **b)** Comparaţi numerele m şi n.
c) Determinaţi numerele $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{20}$ ştiind că:

$$(a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{19}) \cdot \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_6} + \ldots + \frac{1}{a_{20}}\right) = a_1 \cdot a_{20} = 1.$$

(Concursul „Dimitrie Pompeiu“, Botoşani, 2012, Ioan Ţicalo, Adriana Maxiniuc)

140. În diagrama alăturată sunt prezentate notele la teza de matematică pe semestrul I.
a) Numărul elevilor care au luat la teză cel puțin nota 7 este egal cu ... .
b) Media clasei este egală cu ... .
c) Ce procent din efectivul clasei au obținut nota 9 sau 10 la teză?



141. Numărul elevilor dintr-o școală care participă la olimpiada de matematică și vârstele lor sunt reprezentate în tabelul de mai jos.

Număr elevi	7	6	8	9
Vârsta (ani)	9	11	12	13

a) Ce procent din numărul elevilor au vârsta peste 11 ani?
b) Utilizând datele din tabel alcătuiți o diagramă:
   a) circulară;
   b) cu bare verticale.

142. În tabelul de mai jos sunt reprezentate mărimile direct proporționale a și b.

a	2	5		11		10
b	4		7		18	

a) Completați căsuțele goale ale tabelului.
b) Reprezentați printr-un grafic datele din tabelul completat la **a)**.

2. Cazurile de congruență I.U. și C.U. sunt criterii de congruență de tip L.U.U.
Să urmărim, în continuare, modul în care putem aplica acest caz în rezolvarea a două probleme.

Probleme rezolvate

1. În **figura 34** știm că $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ADB \equiv BCA$. Să se arate că: $(AD) \equiv (BC)$ și $(AC) \equiv (BD)$.

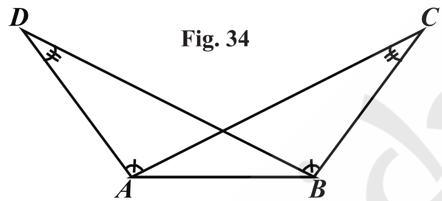


Fig. 34

Ipoteza: $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ABC$
$\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle BCA$
Concluzia: $(AD) \equiv (BC)$
$(AC) \equiv (BD)$

Rezolvare:
Mai întâi, să punem în evidență elementele congruente ale triunghiurilor ABC și BAD, care conțin congruențele din ipoteză, dar și pe cele din concluzie. Important este să observăm că latura $[AB]$ este comună celor două triunghiuri.

Așadar, $(AB) \equiv (AB)$ (latură comună), $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ABC$ (ipoteză), $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ACB$ (ipoteză), de unde, conform cazului L.U.U., rezultă că $\Delta BAC \equiv \Delta ABD$, și atunci $(AD) \equiv (BC)$ și $(AC) \equiv (BD)$.

2. În **figura 35**, se știe că $(AC) \equiv (BC)$, $\sphericalangle AEC \equiv \sphericalangle BDC$ și $\sphericalangle CAE \equiv \sphericalangle CBD$. Arătați că $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle BDE$.

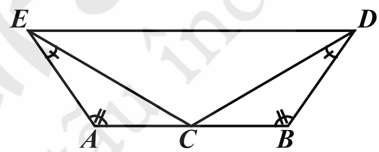


Fig. 35

Ipoteza: $(AC) \equiv (BC)$
$\sphericalangle AEC \equiv \sphericalangle BDC$
$\sphericalangle CAE \equiv \sphericalangle CBD$
Concluzia: $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle BDE$

Rezolvare:
Fiindcă $\sphericalangle AEC \equiv \sphericalangle BDC$ (ipoteză), este necesar să arătăm că $\sphericalangle CED \equiv \sphericalangle CDE$, adică triunghiul DCE este isoscel cu $(CE) \equiv (CD)$.

Ce triunghiuri congruente să utilizăm? Observând **figura de mai sus**, datele din ipoteză și concluzia, nu putem avea decât $\Delta ACE \equiv \Delta BCD$.

Într-adevăr, $(AC) \equiv (BC)$ (ipoteză), $\sphericalangle AEC \equiv \sphericalangle BDC$ (ipoteză) și $\sphericalangle CAE \equiv \sphericalangle CBD$ (ipoteză), de unde, conform cazului L.U.U., avem că $\Delta ACE \equiv \Delta BCD$ și atunci $(CE) \equiv (CD)$. Acum se finalizează cu ușurință problema.

Congruența de tip L.L.U. (latură-latură-unghi)

Să observăm!

Triunghiurile din **figura 36** au câte două laturi (cele însemnate cu liniuțe) și câte un unghi (diferite de cele formate de cele două laturi), respectiv congruente.

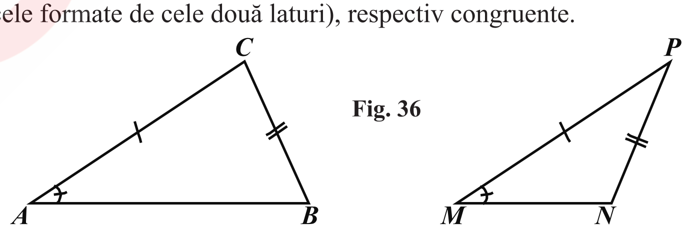


Fig. 36

Cele două triunghiuri sunt congruente?

CAPITOLUL 5

TRIUNGHIUL ISOSCEL TRIUNGHIUL ECHILATERAL

V. 1. Proprietățile triunghiului isoscel și echilateral

Probleme rezolvate

1. Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$ și $m(\sphericalangle BAC) = 30°$. Punctul D se află în interiorul unghiului $\sphericalangle ACB$, astfel încât $m(\sphericalangle DCB) = 15°$ și $m(\sphericalangle DBA) = 75°$. Demonstrați că are loc egalitatea $AC = AD$.

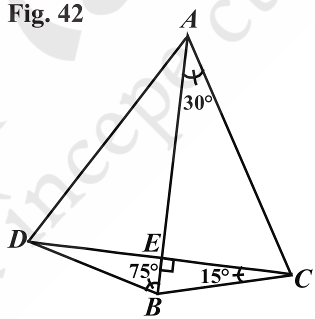
(Concursul „Recreații matematice", Muncel, 2012)

Rezolvare:

Fie $CD \cap AB = \{E\}$, **fig. 42**. Din $(AB) \equiv (AC)$ rezultă că ΔABC este isoscel, de unde $m(\sphericalangle ABC) = \dfrac{180° - m(\sphericalangle BAC)}{2} =$ $= 75°$. Cum $m(\sphericalangle DCB) = 15°$, rezultă că $m(\sphericalangle BEC) = 90°$. În ΔDBC, $(BE$ este bisectoare și înălțime, deci acesta este triunghi isoscel, de unde $(BD) \equiv (BC)$.

$\Delta ABC \equiv \Delta ABD$ (L.U.L.), de unde concluzia.

Fig. 42



2. În triunghiul ABC, $AC < BC$ și $m(\sphericalangle ACB) = 60°$. Pe latura (BC) se consideră punctul D astfel încât $(BD) \equiv (AC)$ și fie punctul E simetricul punctului A față de punctul C. Să se demonstreze că $[DE] \equiv [AB]$.

(Concursul „Recreații Matematice", Muncel, Iași, 2012)

Rezolvare:

Să efectuăm o construcție auxiliară! Cum? Având $m(\sphericalangle ACB) = 60°$, să construim un triunghi echilateral.

Fie $F \in (BC)$ astfel încât $(AC) \equiv (CF)$ (**fig. 43**). Astfel avem triunghiul ACF echilateral, de unde $(CF) \equiv (AC) \equiv (CE) \equiv (AF)$, **(1)**.

$m(\sphericalangle ECD) = m(\sphericalangle AFD) = 180° - 60° = 120°$, **(2)**.

Din $(CF) \equiv (DB)$ rezultă că $(CD) \equiv (FD)$, **(3)**.

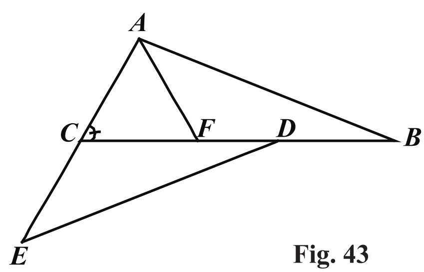


Fig. 43

Observație

Putem avea și ordinea $C - D - F$, însă congruențele sunt aceleași.

Din **(1)**, **(2)** și **(3)** rezultă $\Delta ECD \equiv \Delta AFB$ (L.U.L.), de unde $(AB) \equiv (DE)$.

32. Se dă un triunghi oarecare ΔXOY astfel încât $m(\sphericalangle XOY) < 180°$. Pe latura $(OX$ se construiesc segmentele $[OA]$ şi $[OB]$ iar pe latura $(OY$ segmentele $[OC] \equiv [OA]$ şi $[OD] \equiv [OB]$, iar $OC < OB$. Dreptele AD şi BC se intersectează în M.
a) Să se arate că: $(OM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle XOY$; **b)** Enumeraţi triunghiurile isoscele care apar în figură. ***(Etapa locală, Botoşani, 1990)***

33. Fie $\sphericalangle XOY$ un unghi ascuţit, $A \in (OX$ şi $AB \perp OY$, $B \in (OY$. **a)** Arătaţi că există un punct $P \in (OY$ astfel încât $[AP] \equiv [AO]$. **b)** Pe semidreapta opusă semidreptei $(OX$ se ia punctul C astfel încât O este mijlocul segmentului $[AC]$, iar pe semi-dreapta opusă semidreptei $(OY$ se ia punctul D, astfel încât $\sphericalangle OCD \equiv \sphericalangle OPA$.
Cercetaţi dacă $[CD] \equiv [AP]$. ***(Etapa judeţeană, Botoşani, 1994)***

34. Fie triunghiul ΔABC isoscel cu $m(\sphericalangle BAC) = 108°$. Construim înălţimea (AD) şi bisectoarea $(BF$, $(F \in (AC))$. Demonstraţi că $BF = 2 \cdot AD$. ***(Constantin Guriţă)***

35. Se dă triunghiul isoscel ΔABC cu $[AB] \equiv [AC]$. Perpendicularele în B şi C pe BA respectiv CA se întâlnesc în D. Se prelungeşte $[BD]$ cu un segment (DE), $[DE] \equiv [BD]$. Perpendiculara în E pe BE întâlneşte dreapta AC în F. Arătaţi că:
a) $[EF] \equiv [CF]$; **b)** $AD \perp DF$.

36. Perpendicularele din C şi, respectiv, B pe bisectoarele interioare $(BB'$ şi $(CC'$ ale unui triunghi ABC se intersectează într-un punct P. Demonstraţi că dacă P aparţine mediatoarei laturii $[BC]$, atunci triunghiul ΔABC este isoscel. ***(Ioan Ţicalo)***

37. Se dă triunghiul isoscel ΔABC cu $AB = AC$. Pe latura (AB) se iau punctele M, N, P astfel încât $AM = MN = NP = PB$ şi pe latura (AC) punctele E, F, G astfel încât $AE = EF = FG = GC$. Fie $PE \cap BC = \{S\}$, $MG \cap BC = \{T\}$ şi $EP \cap MG = \{H\}$. Arătaţi că: **a)** $MG = PE$; **b)** $MT = SE$; **c)** $AH \perp BC$; **d)** $\Delta HMP \equiv \Delta HEG$.
(G.M. 5 – 6/1993, Romeo Ilie)

38. Se consideră triunghiul isoscel ΔABC ($[AB] \equiv [AC]$), măsura unghiului $\sphericalangle A$ este de 40°. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$, în exterior, se construiesc triunghiurile echilaterale ΔABD şi ΔACE. Dacă $AF \perp BC$ $(F \in BC)$ şi $M \in AF$, să se arate că: **a)** $[DM] \equiv [EM]$; **b)** $DE \perp AF$; **c)** bisectoarele interioare ale unghiurilor $\sphericalangle D$ şi $\sphericalangle E$ se întâlnesc într-un punct situat pe AF. ***(Etapa judeţeană, Timiş, 1989)***

39. Se dă triunghiul isoscel ΔABC cu $(AB) \equiv (AC)$ şi $m(\sphericalangle BAC) = 36°$. Fie $M \in (AB)$ astfel încât $(AM) \equiv (BC)$ şi N simetricul punctului M faţă de AC. Să se determine: **a)** măsura unghiului $\sphericalangle BMC$; **b)** poziţia unui punct $P \in AB$ astfel încât $NP + PC$ să fie minimă. ***(Niculai Solomon)***

40. Pe laturile unui triunghi ΔABC se consideră punctele distincte $A_1 \in (BC)$, $A_2 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$, $B_2 \in (CA)$, $C_1 \in (AB)$, $C_2 \in (AB)$, astfel încât $A_1 \in (BA_2)$, $B_1 \in (CB_2)$ şi $C_1 \in (AC_2)$, iar unghiurile $\sphericalangle A_1AB$, $\sphericalangle A_2AC$, $\sphericalangle B_1BC$, $\sphericalangle B_2BA$, $\sphericalangle C_1CA$, $\sphericalangle C_2CB$ sunt congruente. Fie $AA_1 \cap CC_2 = \{E\}$, $BB_1 \cap AA_2 = \{D\}$, $CC_1 \cap BB_2 = \{N\}$. Punctele

SOLUȚII. INDICAȚII. RĂSPUNSURI

ARITMETICĂ. ALGEBRĂ. Capitolul I. MULȚIMI

Submulțimi. Cardinalul unei mulțimi. Mulțimi finite și mulțimi infinite. Mulțimea $\mathbb{N}$. Operații cu mulțimi. Principiul includerii și excluderii. Partiții. Principiul cutiei

1. M = {12, 24, 36, 48}; **2.** $(a, b) \in \{(5, 4); (17, 2)\}$. **3.** $A = B = \{(1, 5); (4, 5); (7, 5)\}$. **4.** $n = 10$; $m = 5$; $p = 5$; **5. a)** $a = 2$, $b = 0$ sau $a = b = 2$. **b)** $2^{x+5} \neq 2^{7x-1}$, $4^{x+2} \neq 2^{7x-1}$, $8^{x+1} \neq 2^{7x-1}$, deci $x \neq 1$. Mulţimea este $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. **6.** $a, b, c \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2a + 1, 2b + 1, a + b, b + c, c + a$ sunt mai mari decât $1 \Rightarrow 2c - 5 = 1 \Rightarrow c = 3$; $2a + 1$; $2b + 1$ impare $\Rightarrow 2a + 1 = 3$, $2b + 1 = 5$ sau $2a + 1 = 5$, $2b + 1 = 3 \Rightarrow a = 1$, $b = 2$ sau $a = 2$, $b = 1$. **7. a)** $A_{10} = \{92, 94, ..., 108, 110\}$; $A_{11} = \{112, 114, ..., 132\}$; **b)** S = 9902 + 9904 + 9906 + … + 10100 = (9902 + 10100) + + (9904 + 10098) + … + (10000 + 10002) = 20002 · 50 = 1000100. **8.** {25, 17, 9} sau {41, 29, 17} sau {41, 65, 89}. **9.** Niciun element, unul, două, trei, sau patru elemente. **10.** Card A = 8, Card B = 10. **11.** Card $(A \cap B)$ = Card A + Card B – Card $(A \cup B) = 3$; **12.** $A \cap B = \varnothing$ (mulţimile A şi B sunt disjuncte). **13.** A = {0, 1, 2, 3} şi B = {0, 1, 2}. **14.** $n = 1 \Rightarrow \{2003\} \subset A \cap B$, deci P_1 este falsă. $n = 0 \Rightarrow 1 \in A$, însă $n^{2002} + 2002 > 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, deci P_2 este adevărată. **15.** Cel mai mare număr din D_a este a, iar cel mai mare număr din D_b este b şi cum $D_a = D_b \Rightarrow a = b$. Se observă că cel mai mic număr nenul din M_a este a, ş.a.m.d. **16.** Putem presupune că $a \leq b$. Avem: $a \in D_a \Rightarrow a \in D_a \cup M_a \Rightarrow a \in D_b \cup M_b$; dar $a \leq b$, $a \neq 0 \Rightarrow a \in D_b \Rightarrow$ **(1)** $a / b \Rightarrow a / a + b \Rightarrow (a + b) \in M_a \Rightarrow (a + b) \in D_a \cup M_a \Rightarrow$ $\Rightarrow (a + b) \in D_b \cup M_b$; dar $a + b > b \Rightarrow a + b \in M_0 \Rightarrow b/a + b \Rightarrow$ **(2)** b / a. Din relaţiile **(1)** şi **(2)** $\Rightarrow a = b$. **17.** $M \cup N = \{(9, 0, 0); (2, 2, 5); (4, 5, 0); (6,7,5)\}$. Card $M \setminus N$ = Card M $\Rightarrow$ $\Rightarrow M \cap N = \varnothing$. **18.** A = {1, 2, 3, 4}; B = {3, 9, 27, 81}. **19.** A = {0, 1, 2, 3}, B = {1, 2}. **20.** $A \setminus B = \{1, 5, 15, 60\}$; $A \cap B = \{2, 7, 17, 22, 57, 92\}$. **21. a)** $\varnothing$; **b)** 6. **22.** $A \cup B \cup C =$ $= \{0, 1, 3, 6, 9, 24, 36, 27, 576\}$; $C \setminus (A \cap B) = \{0, 36, 576\}$. **23.** A = {0, 1, 2, 3}; B = {1, 3, 7, 9}; C = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. **24.** A = {1, 2, 3}; B = {0, 1, 2, 3, 4}. **25.** $A \cap B \neq \varnothing$.

26. a) 8; **b)** 12. **27. a)** 2; **b)** 3. **28.** $\dfrac{x+y+6}{x+y} \in \mathbf{N} \Rightarrow 1 + \dfrac{6}{x+y} \in \mathbf{N} \Rightarrow \dfrac{6}{x+y} \in \mathbb{N} \Rightarrow x + y \in$ $\in \{1, 2, 3, 6\}$. $x + y = 1$ şi $(x, y) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ nu dă soluţie. $x + y = 2$ şi $x \geq y \Rightarrow x = 1, y = 1$. $x + y = 3$ şi $x \geq y \Rightarrow x = 2, y = 1$. $x + y = 6$ şi $x \geq y \Rightarrow x = 3, y = 3, x = 4, y = 2; x = 5, y = 1$. Deci A = {(1, 1); (2, 1);(3, 3); (4, 2); (5, 1)}. $\dfrac{x+6}{x} \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 + \dfrac{6}{x} \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{6}{x} \in \mathbb{N} \in x / 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in \{1, 2, 3, 6\}$. $\dfrac{x^2+y^2}{y^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 + \dfrac{x^2}{y^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{x^2}{y^2} \in \mathbb{N}$. Din $x = 1$ şi $\dfrac{1}{y^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow y = 1$.

Din $x = 2$ şi $\dfrac{4}{y^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow y \in \{1,2\}$. Din $x = 3$ şi $\dfrac{9}{y^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow y \in \{1,3\}$. Din $x = 6$ şi $\dfrac{36}{y^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $\Rightarrow y \in \{1, 2, 3, 6\}$. Deci B = {(1, 1); (2, 1); (2, 2); (3, 1); (3, 3); (6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 6)}. **1)** $A \cap B = \{(1, 1); (2, 1); (3, 3)\}$. **2)** $A \setminus B = \{(4, 2); (5, 1)\}$. **3)** $B \setminus A = \{(2, 2); (3, 1); (6,1); (6, 2); (6, 3); (6, 6)\}$. **29.** Card $(A \cup B) = 17$ şi Card $(A \cap B) = 0$. **30.** A = {3, 4, 5, 6}; B = {4, 5, 6, 7}. **31.** B = {4, 5, 6}. Card $A \cup B$ = Card B $\Rightarrow A \subseteq B$ etc. **32.** $A = \{1,2,3,6\}$; $B = \{2,4,14\}$. **33. a)** Se consideră cazurile: $n = 4k$, $n = 4k + 1$, $n = 4k + 2$, $n = 4k + 3$, unde $k \in \mathbb{N}$. **b)** $n = 0$. **34.** $X = \{51,52,...,100\} \cup Y$, unde $Y \subseteq \{1,2,3,...,50\}$. **35.** $A \subseteq \{12,13,14,15,16\}$ etc. **36.** $A \subseteq \{1,2,3,4\}$ etc. **37.** $A = \{1,2,3,4,8\}$; $B = \{1,3,6,12,24\}$. **38.** A = {1, 2, 3, 4, 6, 8}; B = {1, 3, 5, 7, 9}. **39.** $A = \{1,4\}$; $B = \{2,3,4\}$. **40.** Din **(1)** şi **(2)** rezultă $A \cup B \subseteq X$, însă