ARTUR BĂLĂUCĂ

ALGEBRĂ GEOMETRIE

1440
DE PROBLEME SEMNIFICATIVE
PENTRU
OLIMPIADE, CONCURSURI
ŞI
CENTRE DE EXCELENŢĂ

11 TEME PENTRU CENTRELE DE EXCELENŢĂ

Clasa a VII-a

Ediţia a VIII-a

EDITURA TAIDA
– IAŞI –

Prefaţă

Se alătură cam prea des vorbele *carte* şi *dialog;* mai mereu, cartea este un monolog al unuia ce are (sau nu) ceva de spus către alţii care vor, sau trebuie, sau sunt împinşi de întâmplare.

Susţinem că această carte (şi suratele ei) *este un dialog.* Autorul **are** multe de spus şi **ştie** cum să le spună: de decenii el şlefuieşte *nestemate* pentru alte *nestemate:* cizelează probleme pentru adolescenţi ce **pot** şi **vor** să lase minţile lor iscoditoare şi însetate să pătrundă şi să cuprindă matematica. Pentru a lucra asemenea nestemate trebuie să ştii să vezi - dincolo de zguri sterile - lacuri şi scântei, mări şi aurore ce le înnobilează. Mai ştie autorul cum să *monteze* problemele nestemate în culegeri = poteci şi trepte spre ţările matematicii. Tot el, ştie să monteze nestematele de elevi în grupuri potrivite călăuzirii pe poteci relevante şi pe trepte prielnice pornirii de zboruri. La marile expoziţii matematice ale elevilor, olimpiade sau concursuri interjudeţene, elevii săi acaparează mai toate premiile.

Despre trei asemenea *diamante solitare* trebuie să vorbim mai adânc: **Cezar Chirilă**, **Ioana Mihăilescu** şi **Daniel Hurmuz** elevi ai *meşterului* din Botoşani ***Artur Bălăucă***. Prefaţatorul a avut şansa de a-i preţui în diverse lumini şi satisfacţia de a-i vedea — la distanţa de doi ani a vârstelor lor - cucerind aurul competiţiei balcanice de juniori. Tăria acestor diamante vine şi din cărţi ale colegului ***Bălăucă***, străbătute de ei în lung şi în lat. Pentru această carte (şi pentru vecinele ei de raft de librărie sau bibliotecă) ***Cezar***, ***Ioana*** şi ***Daniel*** sunt ***meşteri cizelatori.*** S-a cumpănit dacă să li se zică ***autori;*** este mai potrivit să se spună că din ucenici au devenit calfe, zidari de carte, meşteri, asistenţi ai profesorului.

Este drept să ne amintim de ceva mai vârstnicul lor coleg, ***Daniel Moldovan,*** din alt umăr al ţării, Clujul, şi el medaliat la o balcaniadă de juniori. Nu 1-a avut profesor pe ***Artur Bălăucă*** la clasă, ci doar la loturi de juniori prin Buciumul Iaşilor. După ce a sorbit în vreme din culegerile meşterului, a zămislit de unul singur trei cărţi pentru elevi, îndreptăţindu-şi numele de ***autor.*** Prefaţatorul nu găseşte disonanţe între numirile de ***meşter cizelator*** şi ***autor,*** ci doar potriviri de cuvinte pentru activităţi consonante.

Se ştie bine dar repetarea este aici cu folos: *nestematele de elevi* descopăr în *nestematele de probleme* străluciri ascunse dar profunde. *Meşterul* are privilegiul, sârguinţa, priceperea şi înţelepciunea de a se apleca asupra rezonanţelor dintre nestemate, să le recizeleze şi remonteze în noi culegeri. Circumscriem făptuirile sale zicând că îi învaţă pe elevi (nu doar din clasele sale) să aleagă, să preţuiască şi să cizeleze probleme la care sunt un pic ***co-autori.***

Este dreptul cititorilor să aprecieze dacă potrivirile de cuvinte *carte* - *dialog* şi *autor - meşter cizelator* sunt aici oportune. Poate alte cărţi, născânde din acestea, ne vor ajuta să găsim vorbe mai adecvate.

Prof. Dr. Dan Brânzei , *Împărţitor cu meşterul autor de trude ale şlefuirii diamantelor*

CUPRINS

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I

MULŢIMEA NUMERELOR ÎNTREGI. DIVIZIBILITATE ÎN $\mathbb{Z}$

Reţineţi!

Un număr întreg b divide un număr întreg a dacă există un număr întreg c astfel încât $a = b \cdot c$.

➲ ***Observaţii***

1. Nu există pentru orice pereche de numere întregi a şi b un număr întreg c astfel încât $a = b \cdot c$ şi urmează că relaţia b / a nu este peste tot definită în $\mathbb{Z}$.

2. Pentru orice $a \in \mathbb{Z}$ mulţimea $D_a = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \ / \ a\}$ este mulţimea divizorilor lui a. Dacă $a \in \mathbb{Z}^*$, atunci divizorii lui a sunt în număr finit (cel mult $2|a|$).

Proprietăţi

1. a / a, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$ (*reflexivitatea*); **2**. a / b şi b / $c \Rightarrow a$ / c (*tranzitivitatea*). **3**. a / b şi b / $a \Rightarrow a = b$ sau $a = -b$, adică $|a| = |b|$; **4**. 1 / a şi -1 / a, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$. **5**. a / 1 sau a /$-1 \Rightarrow |a| = 1$; **6**. a / 0, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$; **7**. 0 / $a \Rightarrow a = 0$; **8**. $a/b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (-a) / b \Leftrightarrow a / (-b) \Leftrightarrow (-a) / (-b)$; **9**. a / $b \Rightarrow a$ / $b \cdot c$, oricare ar fi $c \in \mathbb{Z}$. **10**. a / b_1 şi $a / b_2 \Rightarrow a / b_1 \pm b_2$; **11**. a / b_1 şi $a / b_2 \Rightarrow a / b_1c_1 + b_2c_2$, oricare ar fi $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$; **12**. $a / b \Rightarrow ac / bc$, $c \in \mathbb{Z}$; **13**. ac / bc şi $c \neq 0 \Rightarrow a / b$; **14**. a_1 / b_1 şi $a_2 / b_2 \Rightarrow a_1a_2 / b_1b_2$; **15**. $a / b \Rightarrow b = 0$ sau $|a| \leq |b|$; **16**. a / b şi $|a| > |b| \Rightarrow b = 0$.

Cel mai mare divizor comun şi cel mai mic multiplu comun

➲ C.m.m.d.c. al numerelor întregi a şi b (notat (a,b)) este un număr întreg d care satisface condiţiile: **1)** d / a şi d / b; **2)** dacă d_1 / a şi d_1 / b, atunci d_1 / d.

➲ C.m.m.m.c. al numerelor întregi a şi b (notat $[a, b]$) este un număr întreg m care îndeplineşte condiţiile: **1)** a / m şi b / m; **2)** oricare ar fi $m_1 \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea a / m_1 şi b / m_1, atunci m / m_1.

➲ Două numere întregi a şi b se numesc prime între ele dacă $(a, b) = 1$.

➲ Dacă a / bc şi $(a, b) = 1$, atunci a / c. **(teorema lui Gauss)**

➲ Dacă a / c, b / c şi $(a, b) = 1$, atunci ab / c.

➲ $[a,b] \cdot (a, b) = a \cdot b$.

Numere prime şi numere compuse

➲ Un număr întreg a se numeşte **număr prim** dacă mulţimea divizorilor săi are cardinalul 4.

Observaţie. Condiţia revine la $a \notin \{-1, 0, 1\}$ şi $D_a = \{-1, 1, -a, a\}$.

Observaţie. Reprezentarea $n = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, unde $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{N}^*$, $p_1, p_2, ..., p_k$ sunt numere prime şi $0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ se numeşte **descompunerea canonică** a numărului întreg n.

➲ Numărul divizorilor întregi ai unui număr întreg n ($n \neq 0$) scris sub forma: $n = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ este egal cu $2(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$.

Probleme rezolvate:

1. Aflaţi numerele întregi x ştiind că: **a)** $\frac{4x-3}{x-3} \in \mathbb{Z}$; **b)** $\frac{5x-3}{3x+5} \in \mathbb{Z}$.

Rezolvare:

a) $\frac{4x-3}{x-3} \in \mathbb{Z}$ implică $x - 3/4x - 3$, de unde $x - 3/4(x - 3) + (12 - 3)$ sau $x - 3/4(x - 3) + 9$, **(1)**

Cum $x - 3/4(x - 3)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$, din **(1)** rezultă $x - 3/9$, adică $x - 3 \in \{-9; -3; -1; 1; 3; 9\}$. Rezolvând ecuaţiile: $x - 3 = -9$; $x - 3 = -3$ etc. se obţine: $x \in \{-6; 0; 2; 4; 6; 12\}$.

b) $\frac{5x-3}{3x+5} \in \mathbb{Z}$ implică $3x + 5/5x - 3$, de unde $3x + 5/3(5x - 3)$ sau $3x + 5/15x - 9$ sau $3x + 5/5(3x + 5) - 9 - 25$ sau $3x + 5 / 5(3x + 5) - 34$, **(1)** Cum $3x + 5/5(3x + 5)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$ din **(1)** rezultă $3x + 5/34$, de unde $3x + 5 \in \{-34; -17; -2; -1; 1; 2; 17; 34\}$. Rezolvând pe rând ecuaţiile: $3x + 5 = -34$; $3x + 5 = -17$ etc. se obţine $x \in \{-13; -2; -1; 4\}$.

2. Fie şirul de numere naturale 7, 77, 777, 7777, … scrise în baza zece.
Să se arate că printre primii 2011 termeni ai şirului există cel puţin unul divizibil cu 2011.

(Concursul „Matematica, de drag", Bistriţa, 2014, Rodica Coman)

Rezolvare:

Din primele 2011 numere din şirul 10^1, 10^2, 10^3, … vor exista cel puţin două numere care vor da acelaşi rest la împărţirea cu 2011 pentru că (10, 2011) = 1.
Fie acestea 10^a şi 10^b cu $a > b$.
Din $2011 / 10^a - 10^b$ rezultă $2011 / 10^b \cdot (10^{a-b} - 1)$, adică $2011 / 10^b \cdot \underbrace{999...9}_{(a-b)\text{ cifre}}$.

Însă (2011, 10) = 1 şi (2011, 9) = 1, rezultă că $2011 / \underbrace{11...1}_{(a-b)\text{ cifre}}$.

Din $2011 / \underbrace{11...1}_{(a-b)\text{ cifre}}$ şi (7, 2011) = 1, rezultă că $2011 / \underbrace{77...7}_{(a-b)\text{ cifre}}$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Fie mulţimile: $A = \{x \in \mathbb{Z} / -4 \le x \le 2\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{Z} / -5 < x < 4\}$. Determinaţi mulţimile: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

2. Fie mulţimile: $A = \{x \in \mathbb{Z} / |x| \le 3\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{Z}^* / |x - 1| < 2\}$. Determinaţi mulţimile: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

3. Determinaţi $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât mulţimile $A = \{1; 2\}$ şi $B = \{2x - 1; 5x - 3\}$ să fie egale.

4. Să se determine mulţimile A, B, C, D ştiind că:
(1) $A \cup B = \{0,1,2,3,4,5\}$; **(2)** $C \cup D = \{6,7,8,9,10,11\}$;
(3) $(A \cap B) \times (C \cap D) = \{(2,8),(2,9),(3,8),(3,9)\}$;
(4) $(A \setminus B) \times (C \setminus D) = \{(0,6),(0,7),(1,6),(1,7)\}$.

103. Se dă numărul $n=\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{39}+\frac{1}{40}$. **a)** Să se arate că: **i)** $n \notin \mathbb{N}$; **ii)** $n > \frac{36}{25}$.

b) Dacă n se scrie sub formă de fracţie ireductibilă $\frac{p}{q}$, unde $(p, q) = 1$, să se arate că $47/p$ şi $32/q$. **(Artur Bălăucă)**

104. Fie $a_1, a_2, ..., a_{2007}$ numerele 1, 2, 3, ..., 2007 în altă ordine. Arătaţi că două din numerele $|a_1 - 1|, |a_2 - 2|, ..., |a_{2007} - 2007|$ sunt egale.

105. Să se determine numerele reale $a_1, a_2, ..., a_{2001}$ astfel încât: $a_1 + a_2 + ... + a_{2001} = 2001$ şi $|a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = ... = |a_{2000} - a_{2001}| = |a_{2001} - a_1|$.

106. Determinaţi numărul întregilor n, cu $1 \le n \le 2001$, astfel încât $24 / n^3 + 23n$.
(Concursul „Pitagora”, Rm. Vâlcea, M. Ignat, 2002)

107. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi S suma tuturor numerelor naturale x, astfel încât $n^2 \le x < (n+2)^2$.
a) Arătaţi că S este divizibilă cu 6. **b)** Determinaţi n, dacă S = 1386.

108. Determinaţi numerele $\overline{xy}$ în baza 10 care satisfac relaţia $\overline{xy} = 1 + 2 + ... + (x + y)$.
(etapa locală, Botoşani, 2007)

109. Găsiţi ultimele cinci cifre ale numărului 5^{2005}. **(Artur Bălăucă, „SINUS“, 3 / 2005)**

110. Determinaţi numerele naturale n, a şi p ştiind că: $2^n = \overline{\underbrace{aa...a}_{p \text{ cifre}}}_{(3)}$.
(Concursul „N.N. Mihăileanu“, Constanţa, 2011, Artur Bălăucă)

111. Determinaţi numerele naturale x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, dacă $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leqslant 149$ şi $2x_1 = 6x_2 = 12x_3 = 20x_4 = 30x_5$. **(Concursul „Recreaţii Matematice“, Muncel, 2010)**

112. Două numere naturale prime impare consecutive se numesc numere gemene.
a) Dați exemple de 6 perechi de numere gemene.
b) Dacă a și b sunt numere naturale gemene diferite de 3, arătați că nu există $n \in \mathbb{N}$ pentru care numerele $2^{2n} + 6^n + 7^n + a$ și $2^{2n} + 6^n + 7^n + b$ să fie gemene.
(Gazeta Matematică 10/2013, Supliment, Artur Bălăucă)

113. Să se demonstreze că nicio putere cu exponent natural al lui 2 nu poate fi scrisă ca o sumă de numere naturale nenule și consecutive.
(Concursul „Ștefan Dârțu“, Vatra Dornei, 2013, Cătălin Budeanu)

114. Fie A o mulțime cu 5 numere naturale și $S = \{x + y / x, y \in A\}$. Să se arate că dacă mulțimea S are 9 elemente, atunci suma numerelor din mulțimea A este divizibilă cu 5. **(Concursul „Ion Barbu – Dan Barbilian, Călărași, 2013, Vasile Pop)**

115. Vom numi număr „*drag*“ un număr natural care are exact 4 divizori naturali. **a)** Dați un exemplu de trei numere „*dragi*“ consecutive. **b)** Să se arate că nu există trei numere „*dragi*“ consecutive astfel încât primul dintre ele să fie par.
(Concursul „Matematica de drag“, Bistrița, 2012 Cătălin Budeanu)

116. Dacă numărul 2^{2013} are n cifre și numărul 5^{2013} are m cifre, aflați suma $m + n$.

CAPITOLUL II

RELAŢIA DE CONGRUENŢĂ MODULO *m* (temă pentru centrul de excelenţă)

➲ ***Reţineţi!*** Două numere întregi a şi b se numesc **congruente modulo *m***, unde m este un număr întreg, dacă $m/a-b$.

Notaţie: $a \equiv b(\text{mod } m)$. Se citeşte „$a$ congruent cu b modulo m”.

➲ ***Observaţii:***

1. Pentru $m = 0$, $m / a-b \Leftrightarrow a=b$, adică $(a \equiv b(\text{mod } 0)) \Leftrightarrow a=b$, deci relaţia de egalitate este un caz particular al relaţiei de congruenţă (în cazul când modulo este 0).

2. $a \equiv b(\text{mod } 1)$ şi $a \equiv b(\text{mod } -1)$, $\forall a,b \in \mathbb{Z}$.

3. Dacă $m \neq 0$ şi r este restul împărţirii unui număr întreg a prin m, atunci $a \equiv r(\text{mod } m)$ şi $a \equiv r-m(\text{mod } m)$.

Exemplu: $30 \equiv 8(\text{mod } 11)$ şi $30 \equiv -3(\text{mod } 11)$.

(În aplicaţiile practice, dintre numerele r şi r-m, este de preferat cel care are modulul mai mic).

Reţineţi!

Teoremă: *Două numere a şi b sunt congruente modulo m,* $m \neq 0$*, dacă şi numai dacă dau acelaşi rest la împărţirea prin m.*

Proprietăţi:

1. $a \equiv a(\text{mod } m)$ (**reflexivitatea**);

2. $a \equiv b(\text{mod } m) \Rightarrow b \equiv a(\text{mod } m)$ (**simetria**);

3. $a \equiv b(\text{mod } m)$ şi $b \equiv c(\text{mod } m) \Rightarrow a \equiv c(\text{mod } m)$ (**tranzitivitatea**);

4. $a \equiv b(\text{mod } m)$ şi $c \equiv d(\text{mod } m) \Rightarrow a+c \equiv b+d(\text{mod } m)$ şi $a-c \equiv b-d(\text{mod } m)$.

Consecinţe:

a) $a \equiv b(\text{mod } m)$ şi $c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a+c \equiv b+c(\text{mod } m)$.

b) Un termen aflat într-un membru oarecare al unei congruenţe poate fi trecut în celălalt membru, schimbându-i-se semnul.

c) Se poate aduna sau scădea la fiecare membru al unei congruenţe orice multiplu al modulului.

5. $a \equiv b(\text{mod } m)$ şi $c \equiv d(\text{mod } m) \Rightarrow ac \equiv bd(\text{mod } m)$.

În general $a_i \equiv b_i(\text{mod } m), i=1,2,...,n \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} a_i \equiv \prod_{i=1}^{n} b_i(\text{mod } m)$.

Consecinţe:

a) $a \equiv b(\text{mod } m)$ şi $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a^n \equiv b^n(\text{mod } m)$.

b) $a \equiv b(\text{mod } m)$ şi $c \in \mathbb{Z} \Rightarrow ac \equiv bc(\text{mod } m)$.

6. $a \equiv b(\text{mod } m)$ şi $c \in \mathbb{Z} \Rightarrow ac \equiv bc(\text{mod } mc)$.

7. $ac \equiv bc(\text{mod } m)$ şi $(c,m)=1 \Rightarrow a \equiv b(\text{mod } m)$.

8. $ac \equiv bc(\text{mod } mc)$ şi $c \neq 0 \Rightarrow a \equiv b(\text{mod } m)$.

9. $a \equiv b(\text{mod } m_1)$, $a \equiv b(\text{mod } m_2)$,..., $a \equiv b(\text{mod } m_k)$ şi $\text{M} = [m_1, m_2, ..., m_k] \Rightarrow a \equiv b(\text{mod M})$.

10. $a \equiv b \pmod{m}$ şi $d/m \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}$.

11. $a \equiv b \pmod{m}$ şi d/a, $d/m \Rightarrow d/b$.

Consecinţă: $a \equiv b \pmod{m}$ şi $m/a \Rightarrow m/b$.

Mica teoremă a lui Fermat. Dacă $a, p \in \mathbb{Z}$, p este prim (pozitiv) şi $p \nmid a$, atunci $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Demonstraţie: Considerăm următorii multipli ai lui a:

$$\mathrm{M}_1 = a,\ \mathrm{M}_2 = 2a,\ \mathrm{M}_3 = 3a,\ ..., \mathrm{M}_{p-1} = (p-1)a.$$

Nici unul dintre aceşti întregi nu se divide cu p.

Fie $r_1, r_2, r_3, ...r_{p-1}$ resturile obţinute la împărţirea numerelor $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3, ..., \mathrm{M}_{p-1}$, prin p.

Avem congruenţele: $\mathrm{M}_1 \equiv r_1 \pmod{p}$, $\mathrm{M}_2 \equiv r_2 \pmod{p}$, ..., $\mathrm{M}_{p-1} \equiv r_{p-1} \pmod{p}$.(*)

Oricare două din resturile $r_1, r_2, r_3, ...r_{p-1}$ sunt distincte. Într-adevăr, dacă presupunem că există $i, j \in \{1, 2, 3, ..., p-1\}$, $i \neq j$ astfel încât $r_i = r_j$, urmează că $p/M_i - M_j \Rightarrow p/a(i-j)$.

Cum $p \nmid a$, se obţine că $p/\ i-j$, ceea ce este absurd deoarece $|i-j| < p$. Rezultă că $\{r_1, r_2, ..., r_{P-1}\} = \{1, 2, ..., p-1\}$. **(1)**

Înmulţind membru cu membru congruenţele (*), obţinem $\mathrm{M}_1 \cdot \mathrm{M}_2 \cdot \mathrm{M}_3 \cdot ... \cdot \mathrm{M}_{p-1} \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot ... \cdot r_{p-1} \pmod{p}$, adică $a \cdot 2a \cdot 3a \cdot ... \cdot (p-1)a \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot ... \cdot r_{p-1} \pmod{p} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^{p-1} \cdot (p-1)! \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot ... \cdot r_{p-1} \pmod{p}$ şi, cum $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot ... \cdot r_{p-1} = (p-1)!$ (în baza relaţiei (**1**)), rezultă că $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Teorema lui Euler. Dacă a, $m \in \mathbb{Z}$ şi $(a, m) = 1$, atunci $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, unde $\varphi(m)$ este **funcţia lui Euler**. (numărul numerelor prime cu m mai mici decât $|m|$)

Teorema lui Wilson. Dacă p este un număr prim, atunci $(p - 1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Teorema reciprocă a lui Wilson. Dacă $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$ şi $(n - 1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$, atunci n este număr prim.

Probleme rezolvate:

1. Să se arate că numărul $A = 3^{40} - 2^{40}$ se divide cu 5. **(G.M. 5/1987)**

Soluţie: Conform teoremei lui Fermat avem: $3^4 \equiv 1 \pmod{5}$ şi $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$.

$3^4 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow (3^4)^{10} \equiv 1^{10} \pmod{5} \Rightarrow 3^{40} \equiv 1 \pmod{5}$, **(1)**

$2^4 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow (2^4)^{10} \equiv 1^{10} \pmod{5} \Rightarrow 2^{40} \equiv 1 \pmod{5}$, (**2**) Scăzând membru cu membru congruenţele (**1**) şi (**2**), obţinem $3^{40} - 2^{40} \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow 5/3^{40} - 2^{40}$.

2. Să se afle cel mai mic număr natural k astfel încât numărul $A = 194^{19} \cdot 125^{14} + k$ să fie divizibil cu 7. **(G.M. 1/1988)**

Soluţie: $194 = 7 \cdot 27 + 5 \Rightarrow 194 \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow 194^{19} \equiv 5^{19} \pmod{7}$, (**1**)

Aplicând teorema lui **Fermat**, avem:

$5^6 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 5^{18} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 5^{19} \equiv 5 \pmod{7}$, (**2**).

(**1**) şi (**2**) $\Rightarrow 194^{19} \equiv 5 \pmod{7}$, (**3**) $125 \equiv 7 \cdot 17 + 6 \Rightarrow 125 \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow 125 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow$ $\Rightarrow 125^{14} \equiv (-1)^{14} \pmod{7} \Rightarrow 125^{14} \equiv 1 \pmod{7}$, (**4**).

Înmulţind membru cu membru congruenţele (**3**) şi (**4**), obţinem:
$194^{19}\cdot 125^{14}\equiv 5\left(\mathrm{mod}\ 7\right)$.(**5**) $7/194^{19}\cdot 125^{14}+k\Rightarrow 194^{19}\cdot 125^{14}+k\equiv 0\left(\mathrm{mod}\ 7\right)\Rightarrow$
$\Rightarrow 194^{19}\cdot 125^{14}\equiv -k\left(\mathrm{mod}\ 7\right)$. (**6**); (**5**) şi (**6**) $\Rightarrow\ 5\equiv -k\left(\mathrm{mod}\ 7\right)\ \Rightarrow\ 5+k\equiv 0\left(\mathrm{mod}\ 7\right)\Rightarrow$
$\Rightarrow 7/5+k$. Cum cel mai mic număr natural nenul divizibil cu 7 este 7, se obţine k =2.

3. Arătaţi că numărul $7^{1994}+5^{1994}-74$ este divizibil cu 1994.

Soluţie: $7^{996}\equiv 1\left(\mathrm{mod}\ 997\right)$(**Fermat**) $\Rightarrow\ \left(7^{996}\right)^2\equiv 1\left(\mathrm{mod}\ 997\right)\ \Rightarrow\ 7^{1992}\equiv 1\left(\mathrm{mod}\ 997\right)\ \Rightarrow$
$\Rightarrow\ 7^{1994}\equiv 49\left(\mathrm{mod}\ 997\right)$, (**1**) $5^{996}\equiv 1\left(\mathrm{mod}\ 997\right)$ (**Fermat**) $\Rightarrow\ 5^{1992}\equiv 1\left(\mathrm{mod}\ 997\right)\ \Rightarrow$
$\Rightarrow 5^{1994}\equiv 25\left(\mathrm{mod}\ 997\right)$, (**2**) Din (**1**) şi (**2**) $\Rightarrow\ 7^{1994}+5^{1994}\equiv 74\left(\mathrm{mod}\ 997\right)$ etc.

4. Fie $p > 3$ un număr prim. Arătaţi că numărul $7^p - 6^p - 1$ este divizibil cu 43.

(Olimpiadă Iran)

Soluţie: Cazul $p = 6k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$)
Avem $7^2 \equiv 6(\mathrm{mod}\ 43) \Rightarrow (7^2)^3 \equiv 6^3(\mathrm{mod}\ 43)$. Însă $6^3 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 43)$, deci $7^6 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 43)$, de unde $7^{6k} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 43)$ și $7^{6k+1} \equiv 7(\mathrm{mod}\ 43)$, **(1)**. Pe de altă parte: $6^3 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 43) \Rightarrow$ $\Rightarrow 6^{6k} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 43)$ și $6^{6k+1} \equiv 6(\mathrm{mod}\ 43)$, **(2)**. Din **(1)** și **(2)** rezultă $7^p - 6^p - 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 43)$, adică $43 / 7^p - 6^p - 1$.

Cazul $p = 6k + 5$ ($k \in \mathbb{N}^*$)
Din $7^2 \equiv 6(\mathrm{mod}\ 43)$ rezultă $7^3 \equiv 42(\mathrm{mod}\ 43)$. Deci $7^5 \equiv 252(\mathrm{mod}\ 43)$. Însă $252 \equiv 37(\mathrm{mod}\ 43)$, deci $7^5 \equiv 37(\mathrm{mod}\ 43)$. Din $7^{6k} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 43)$ și $7^5 \equiv 37(\mathrm{mod}\ 43)$ rezultă că $7^{6k+5} \equiv 37(\mathrm{mod}\ 43)$, **(3)**. Din $6^3 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 43)$ și $6^2 \equiv 36(\mathrm{mod}\ 43)$ rezultă $6^5 \equiv 36(\mathrm{mod}\ 43)$. Din $6^{6k} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 43)$ și $6^5 \equiv 36(\mathrm{mod}\ 43)$ rezultă că $6^{6k+5} \equiv 36(\mathrm{mod}\ 43)$, **(4)**. Din **(3)** și **(4)** rezultă că $7^{6k+5} - 6^{6k+5} - 1 \equiv$ $\equiv (37 - 36 - 1)(\mathrm{mod}\ 43)$, adică $43 / 7^p - 6^p - 1$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

4. Să se arate că numărul $E = 1948^{18n} + 96^{14n} - 2$ este divizibil cu 19, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

5. Aflaţi restul împărţirii numărului 10^{1000} la 27.

6. Să se afle restul împărţirii numărului $a = 139^{227}$ la 15.

7. Aflaţi restul împărţirii numărului $17^{19}\cdot 19^{17}$ la 16.

8. Să se determine restul împărţirii numărului: **a)** $985 \cdot 1275 + 970$ la 9;
b) 5^{381} la 13; **c)** $4690^7 \cdot 157^8 - 151^5$ la 13; **d)** $13^{23} \cdot 27^{41}$ la 8.

9. Aflaţi restul împărţirii numărului $8^{183} + 13^{211}$ la 15.

10. Aflaţi restul împărţirii numărului 439^{72} la 13.

11. Aflaţi restul împărţirii numărului 1986^{1987} la 17.

12. Legenda spune că, la facerea lumii, Creatorul a plantat un arbore cu 7 crengi, pe fiecare creangă aflându-se câte 27 de frunze. Frunzele cresc alternativ, câte una pe fiecare creangă, astfel încât la începutul celui de-al n-lea an, numărul de frunze al arborelui este $4^{3n} + 5^{3n}$. Marele Vraci numără frunzele de pe fiecare creangă şi, dacă găseşte acelaşi număr de frunze pe fiecare, ştie că anul care tocmai a început va fi un an bun. Anul 2005 de la facerea lumii este un an bun? Care sunt anii buni?

(Concursul „Florica T. Câmpan“, Gabriel Popa, 2005)

CAPITOLUL II

PATRULATERE

Probleme rezolvate:

1. Se consideră pătratul $ABCD$ cu $AB = a$ și punctele M și N mijloacele segmentelor (OB) și, respectiv, (CD). Dacă $\{P\} = AM \cap BC$ și $\{O\} = AC \cap BD$, determinați:

a) raportul dintre aria triunghiului ANP și aria pătratului $ABCD$;

b) măsura unghiului $\sphericalangle NAM$;

c) arătați că $\sphericalangle PNC \equiv \sphericalangle PMC$.

(Concursul „Dimitrie Pompeiu“, Botoșani, 2015, Artur Bălăucă)

Rezolvare:

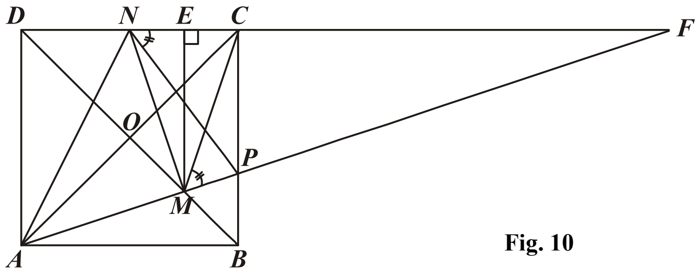


Fig. 10

a) În ΔOBC cu transversala A-M-P din teorema lui **Menelaos** obținem $\frac{AO}{AC} \cdot \frac{MB}{MO} \cdot \frac{PC}{PB} = 1$, de unde $PC = \frac{2}{3} \cdot BC$ și $PB = \frac{1}{3} \cdot BC$ (**fig. 10**).

$\mathcal{A}_{\Delta ANP} = \mathcal{A}_{ABCD} - (\mathcal{A}_{ABP} + \mathcal{A}_{NCP} + \mathcal{A}_{AND}) = \frac{5a^2}{12}$, deci $\frac{\mathcal{A}_{ANP}}{\mathcal{A}_{ABCD}} = \frac{5}{12}$.

b) $\mathcal{A}_{ANP} = \frac{AN \cdot AP \cdot \sin(\sphericalangle MAN)}{2} = \frac{5a^2}{12}$, de unde $\sin(\sphericalangle MAP) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, deci $m(\sphericalangle MAN) = 45°$.

c) Fie $\{F\} = AP \cap CD$. $\Delta MBP \sim \Delta MDA$ (**t.f.a.**), de unde $\frac{PB}{AD} = \frac{MP}{MA} = \frac{1}{3}$. Deci $\frac{AP}{MA} = \frac{4}{3}$ și $MA = \frac{3}{4}AP = \frac{a\sqrt{10}}{4}$. Fie $ME \perp CD$, $E \in (CD)$. $\Delta DME \sim \Delta DBC$ (**t.f.a.**), de unde $\frac{ME}{BC} = \frac{DM}{BD} = \frac{DE}{CD}$ și $ME = DE = \frac{3}{4}a$, iar $NE = DE - DN = \frac{1}{4}a$. Din ΔMNE cu **Pitagora** se obține $MN = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Deci $(AM) \equiv (MN)$ și ΔAMN este isoscel. Cum $m(\sphericalangle NAM) = 45°$, rezultă că $m(\sphericalangle NMA) = 90°$. $\Delta CPF \sim \Delta MNF$ (**u.u.**), de unde $\frac{CF}{MF} = \frac{PF}{NF}$ sau $\frac{CF}{PF} = \frac{MF}{NF}$. Însă $m(\sphericalangle CFM) = m(\sphericalangle NFP)$, deci $\Delta FMC \sim \Delta FNP$ (**l.u.l.**) și rezultă că $m(\sphericalangle PNC) = m(\sphericalangle PMC)$.

Observație: Puteți aborda problema și cu patrulatere inscriptibile.

2. Pe laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ ale unui pătrat se consideră respectiv punctele M, N, P, Q. Să se arate că dreptele MP şi NQ sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $AM + CP = BN + DQ$.

Rezolvare:
După o eventuală renotare de puncte, să admitem că are loc $DP < AM$ şi $AQ < BN$. Fie $DQ' \parallel QN$, $Q' \in BC$ şi $AM' \parallel PM$, $M' \in CD$ (**fig. 11**). Rezultă $D \in [M'C]$, $C \in [BQ']$.
Atunci $AM + CP = BN + DQ \Leftrightarrow [CM'] \equiv [BQ'] \Leftrightarrow \Delta DQ'B \equiv \equiv \Delta AM'C \Leftrightarrow \Delta Q'DC \equiv \Delta M'AD \Leftrightarrow DQ' \perp M'A \Leftrightarrow PM \perp QN$.

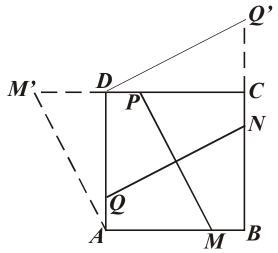


Fig. 11

Observaţie:
Din soluţia prezentată se obţine următoarea propoziţie: $MP \perp QN \Leftrightarrow [MP] \equiv [NQ]$.

3. În exteriorul triunghiului ΔABC se construiesc pătratele $ABNM$ şi $ACPQ$ care au centrele O_1 şi, respectiv, O_2. Dacă punctul E este mijlocul laturii (BC) să se arate că:
a) $AE \perp MQ$;
b) $(MC) = (BQ)$;
c) $EO_2 \perp EO_1$.

Rezolvare:
a) Fie A' simetricul punctului A faţă de punctul E şi $EA \cap MQ = \{F\}$, iar $BQ \cap CM = \{H\}$ (**fig. 12**).
Patrulaterul $ACA'B$ este paralelogram (diagonalele se înjumătățesc), deci $(A'C) \equiv (AB) \equiv (AM)$ şi $m(\sphericalangle ACA') + m(\sphericalangle BAC) = 180°$.
Însă $m(\sphericalangle MAQ) + m(\sphericalangle BAC) = 180°$, deci $m(\sphericalangle MAQ) = m(\sphericalangle ACA')$.
Urmează că $\Delta AA'C \equiv \Delta QMA$ (L.U.L.), de unde $m(\sphericalangle AQM) = m(\sphericalangle A'AC)$.
Dar $m(\sphericalangle QAF) + m(\sphericalangle A'AC) = 90°$, deci $m(\sphericalangle AFQ) = 90°$ şi $AE \perp MQ$.

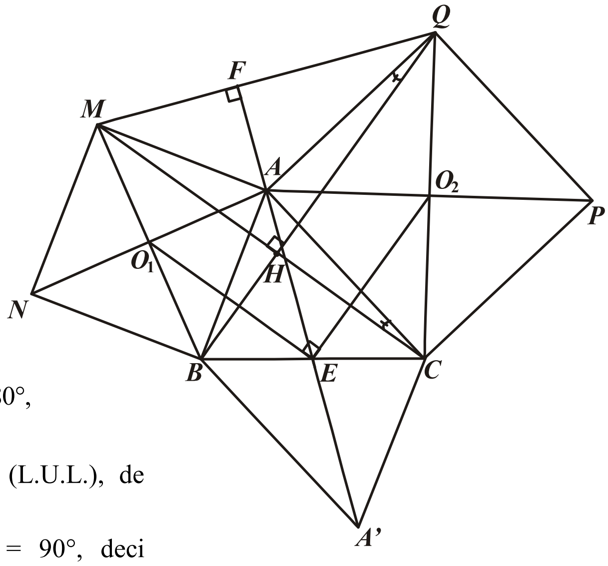


Fig. 12

b) $\Delta AMC \equiv \Delta ABQ$ (L.U.L.), de unde $(MC) \equiv (BQ)$
c) Din $\Delta AMC \equiv \Delta ABQ$ rezultă că $m(\sphericalangle AQB) = m(ACM) = u°$.
Însă $m(\sphericalangle HQC) + m(\sphericalangle HCQ) = (45° - u°) + (45° + u°) = 90°$. Deci $BQ \perp MC$.
Reţineţi acest rezultat.
În triunghiurile MBC şi QBC, (O_1E) şi (O_2E) sunt linii mijlocii şi rezultă că $EO_2 \parallel BQ$ şi $AO_1 \parallel MC$. Cum $BQ \perp MC$, rezultă că şi $EO_1 \perp EO_2$.

123. Un trapez isoscel *ABCD* are bazele [*AB*] şi [*CD*]. Paralelele duse prin punctele *A* şi *B* la diagonalele trapezului se intersectează cu dreapta *CD* în *E*, respectiv *F*, iar paralelele duse prin punctele *C* şi *D* la aceleaşi diagonale se intersectează cu *AB* în *G* şi, respectiv, *H*. Să se arate că patrulaterul *EFGH* este trapez isoscel.

(G.M. 7/1978, Ion Voicu)

124. Mijloacele laturilor unui patrulater convex *ABCD* sunt vârfurile unui pătrat dacă şi numai dacă există cel puţin un punct *M* în interiorul patrulaterului *ABCD* astfel încât triunghiurile ΔMAB şi ΔMCD să fie triunghiuri dreptunghice isoscele cu vârful în punctul *M*. **(Concursul „Sorin Simion“, Piteşti, Ioan Chera, 2003)**

125. Fie *ABCD* un trapez cu bazele [*AB*] şi [*CD*] în care $AB = 2CD$ şi $m(\sphericalangle ADC) + m(\sphericalangle DCB) = 270°$. Fie punctele *M*, *F*, *N*, *E*, *R*, *S*, respectiv, mijloacele segmentelor [*CD*], [*BC*], [*AB*], [*AD*], [*AC*], [*BD*]. Să se demonstreze că: **a)** triunghiul ΔCND este dreptunghic; **b)** $EF = 3MN$; **c)** patrulaterul *MRNS* este dreptunghi;
d) $2MN < AD + BC$. **(G.M. 9/1986, Dincă Serafim)**

126. Se dă dreptunghiul *ABCD*. Punctele *E* şi *F* aparţin respectiv segmentelor (*BC*) şi (*DC*) astfel încât $\sphericalangle DAF \equiv \sphericalangle FAE$. Arătaţi că dacă $DF + BE = AE$, atunci *ABCD* este pătrat. **(etapa judeţeană, 2002)**

127. Se dă patrulaterul convex *ABCD*, în care $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$. Dacă bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle C$ sunt congruente, atunci *ABCD* este paralelogram.

(etapa locală, Neamţ, Costică Grigoriu, 2004)

128. În trapezul *ABCD* ($AB \parallel CD$ şi $AB < CD$) se consideră $AE \perp DC$, $E \in DC$ şi punctul *F*, mijlocul segmentului [*AC*]. Ştiind că $EF \parallel BD$, să se arate că trapezul *ABCD* este isoscel. **(etapa locală, Botoşani, 2006)**

129. Dacă un trapez isoscel are un unghi cu măsura de 30° şi lungimea bazei mici egală cu a şaptea parte din lungimea bazei mari, atunci trapezul poate fi descompus în opt triunghiuri congruente.

(Concursul „Matematica, de drag“, Ioan Bogdan, Bistriţa, 2007)

130. Fie *ABCD* un dreptunghi cu $AB < BC$. Fie punctul $P \in (AC)$ astfel încât $(BP) \equiv (AB)$ şi *M* simetricul lui *B* faţă de *P*. Ce poligon determină punctele *D, M, P, C*? Justificaţi!

(Concursul „Henri Coandă“, Câmpulung Moldovenesc. Dorel Ispăşoiu, 2007)

131. În triunghiul ΔABC, cu unghiul drept în vârful *A*, se duce înălţimea *AD* ($D \in BC$) şi se consideră un punct *F* pe segmentul (*AD*). Perpendiculara în punctul *F* pe dreapta *FC* intersectează dreapta *AB* în punctul *G*. Paralela prin punctul *A* la dreapta *FG* intersectează dreapta *BC* în punctul *H*. Să se arate că patrulaterul *AGFH* este paralelogram.

CAPITOLUL VI

CERCUL

INSCRIPTIBILITATEA (temă pentru centrul de excelenţă)

Determinarea cercului

1°. *Fiind dat un punct A, există o infinitate de cercuri care „trec” prin A; mulţimea centrelor acestor cercuri coincide cu planul mai puţin punctul A.*

2°. *Fiind date două puncte distincte A şi B, există o infinitatea de cercuri care „trec” prin A şi B; mulţimea centrelor acestor cercuri coincide cu mediatoarea segmentului [AB].*

3°. *Fiind date trei puncte necoliniare A, B, C, există un cerc unic care conţine punctele A, B, C; centrul acestui cerc este intersecţia mediatoarelor segmentelor [AB], [BC], [CA].*

Poziţiile unei drepte faţă de un cerc

Fie un cerc $\mathscr{C}(O, r)$ şi o dreaptă a. Dacă $d(O,a)$ este distanţa de la O la a, atunci avem:

$d(O,a) > r \Leftrightarrow a \cap \mathscr{C}(O, r) = \varnothing$ (a este exterioară $\mathscr{C}(O,r)$);

$d(O,a) = r \Leftrightarrow a$ şi $\mathscr{C}(O, r)$ au exact un punct comun; (a este tangentă la $\mathscr{C}(O,r)$);

$d(O,a) < r \Leftrightarrow a$ şi $\mathscr{C}(O, r)$ au exact două puncte comune (a este secantă $\mathscr{C}(O,r)$).

Tangenta la cerc

Tangenta la cerc este perpendiculară pe raza care „trece” prin punctul comun.

Folosind această proprietate a tangentei într-un punct la cerc se pot demonstra următoarele:

1°. *Există o infinitate de cercuri tangente la laturile unui unghi propriu dat; mulţimea centrelor acestor cercuri coincide cu bisectoarea unghiului.*

2°. *Există o infinitate de cercuri tangente la două drepte concurente; mulţimea centrelor acestor cercuri coincide cu reuniunea bisectoarelor celor patru unghiuri proprii formate în jurul punctului de intersecţie a dreptelor date.*

3°. *Fiind dat un triunghi ΔABC există patru cercuri tangente tuturor dreptelor AB, BC, CA.* (*cercuri tritangente*)

Tangente la un cerc dintr-un punct exterior acestuia

1°. *Dintr-un punct exterior unui cerc se pot duce exact două tangente la acel cerc.*

2°. *Tangentele la un cerc $\mathscr{C}(O,r)$ dintr-un punct A exterior acestuia sunt congruente şi formează unghiuri congruente cu dreapta AO.*

3°. *Dacă se consideră tangentele [AM] şi [AN] la un cerc $\mathscr{C}(O,R)$, atunci:*

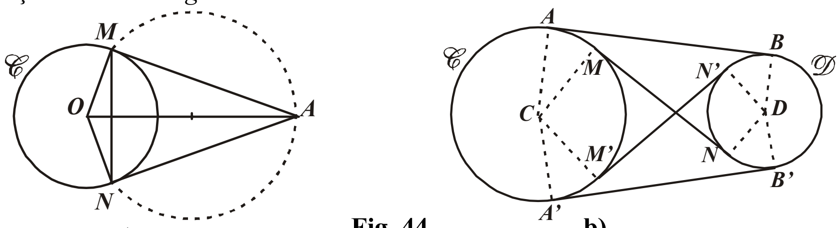
a) (*OA este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MON$;* **b)** (*AO este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MAN$;*

c) *OA este mediatoarea segmentului MN* **(fig. 44 a)**.

Tangente comune a două cercuri

Dacă două cercuri nu sunt „interioare” (sau concentrice), atunci există cel puţin o tangentă comună ambelor cercuri, numărul maxim de tangente comune fiind patru.

În **(fig.44 b)** dreptele AB şi $A'B'$ sunt *tangentele comune exterioare* cercurilor $\mathscr{C}$ şi $\mathscr{D}$, iar MN şi $M'N'$ *sunt tangentele comune interioare*.



a) **Fig. 44** **b)**

Patrulater circumscris unui cerc. Patrulater circumscriptibil

Definiţia 1. *Un patrulater se numeşte circumscris unui cerc dacă laturile sale sunt tangente la acel cerc.*

În acest caz se spune că *cercul este înscris în patrulater.*

Definiţia 2. *Un patrulater ABCD se numeşte circumscriptibil, dacă există un cerc tangent la toate laturile sale.*

TEOREME REMARCABILE

Teorema 1. *Orice patrulater circumscriptibil este convex.*

Teorema 2. (***Pithot***) *Patrulaterul convex ABCD este circumscriptibil dacă şi numai dacă AD + BC = AB + CD.* (*Pentru demonstraţie, vezi [5]*)

Teorema 3. *Un patrulater convex este circumscriptibil, dacă şi numai dacă bisectoarele a trei dintre unghiurile sale interioare sunt congruente.*

Unghi format de o coardă a unui cerc şi tangenta la cerc într-o extremitate a coardei. Unghi cu vârful în exteriorul unui cerc. Unghi cu vârful în interiorul unui cerc

1° Măsura unghiului format de o coardă a unui cerc cu tangenta la cerc într-o extremitate a coardei este egală cu măsura arcului de cerc situat în interiorul unghiului.

2° Măsura unghiului ce are un vârf în exteriorul unui cerc, iar fiecare latură a sa are cel puţin un punct comun cu cercul este egală cu semidiferenţa măsurilor arcelor acelui cerc situate în interiorul unghiului.

3° Măsura unui unghi ce are vârful în interiorul unui cerc este egală cu semisuma măsurilor arcelor de cerc situate în interiorul unghiului şi, respectiv, în interiorul unghiului opus la vârf.

4° Poziţiile relative a două cercuri

Fie două cercuri $\mathcal{C}_1(O_1,R_1)$ şi $\mathcal{C}_2(O_2,R_2)$, $R_1 \leqslant R_2$.

a. *Dacă* $O_1O_2 > R_1+R_2$, *atunci* $\mathcal{C}_1(O_1, R_1) \cap \mathcal{C}_2(O_2, R_2)= \varnothing$. (*cercuri exterioare*)

b. *Dacă* $O_1O_2 = R_1+R_2$, *atunci cercurile au exact un punct comun situat pe dreapta* O_1O_2. (*cercuri tangente exterior*)

c. *Dacă* $|R_1 - R_2| < O_1O_2 < R_1 + R_2$ *atunci cele două cercuri au exact două puncte comune.* (*cercuri secante*)

d. *Dacă* $O_1O_2 = R_2 - R_1$, *atunci cercurile au un singur punct comun situat pe dreapta* O_1O_2. (*cercuri tangente interior*)

e. *Dacă* $R_1 \neq R_2$ *şi* $O_1O_2 < R_2 - R_1$ *atunci* $\mathcal{C}_1(O_1, R_1) \cap \mathcal{C}_2(O_2, R_2) = \varnothing$. (*cercuri interioare*)

f. *Dacă* $O_1 = O_2$ *şi* $R_1 \neq R_2$, *atunci cercurile nu au nici un punct comun.* (*cercuri concentrice*)

Patrulater înscris în cerc. Patrulater inscriptibil

Definiţia 1. *Un patrulater se numeşte înscris într-un cerc dacă vârfurile sale aparţin acelui cerc.*

În acest caz se spune că cercul este circumscris patrulaterului.

Definiţia 2. *Un patrulater se numeşte inscriptibil dacă există un cerc care să conţină toate vârfurile sale* (*adică vârfurile patrulaterului sunt conciclice*).

Teorema 1. *Orice patrulater inscriptibil este patrulater convex.*

Condiţii de inscriptibilitate

Teorema 2. *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca un patrulater convex să fie inscriptibil este ca două din unghiurile sale opuse să fie suplementare.*

Necesitatea se demonstrează folosind teorema măsurii unghiului înscris într-un cerc, iar suficienţa, cu teorema arcului capabil de un unghi dat.

Consecinţe. **1.** *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca un patrulater convex să fie inscriptibil este ca unul dintre unghiurile exterioare să fie congruent cu unghiul interior opus.*

iv) $\sphericalangle AC'B' \equiv \sphericalangle BCA$ (patrulaterul $BCB'C'$ este iscriptibil) şi $m(\sphericalangle TAB) = \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2} =$

$= \frac{m(\sphericalangle ACB)}{2}$ **(teorema unghiului înscris)** etc.

v) Patrulaterele $BCB'C'$ şi $CA'C'A$ fiind inscriptibile rezultă că $m(\sphericalangle BC'A) = m(\sphericalangle AC'B') =$ $= m(\sphericalangle ACB)$. Analog se arată că $m(\sphericalangle AB'C') = m(\sphericalangle A'B'C)$ şi $m(\sphericalangle BA'C') = m(\sphericalangle B'A'C)$. Finalizaţi utilizând **teorema biliardului**, vezi **problema 8, pagina 161**.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. În triunghiul isoscel ABC, $AB = AC$, D este un punct oarecare pe (BC) şi E este intersecţia semidreptei $(AD$ cu cercul circumscris triunghiului ΔABC. Să se arate că **a)** AB este tangentă cercului circumscris triunghiului ΔBDE; **b)** $AB^2 = AD \cdot AE$.

2. Fie cercul $\mathcal{C}(O,R)$ şi A un punct în interiorul său. Care este coarda de lungime minimă ce conţine punctul A?

3. Se consideră un cerc de centru O, un diametru $[AB]$ al acestuia şi un punct $M \in (OA$, $M \neq A$. Să se demonstreze că pentru orice punct N al cercului, distinct de A şi de B au loc inegalităţile $MA < MN < MB$.

4. Fie n puncte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \in \mathbb{N}$) pe cercul $\mathcal{C}(O,R)$. Să se arate că pentru orice punct M din planul cercului (în legătură cu E: 10478, G.M. 6/1992) avem: $\sum_{i=1}^{n} MA_i \leq nMN$, unde $N \in \mathcal{C}(O,R) \cap (MO$ şi $O \in [MN]$. **(Aida-Elena Bălăucă)**

5. Fie O centrul cercului circumscris unui triunghi ΔABC care are $m(\sphericalangle B) = 4m(\sphericalangle C)$. Să se arate că dacă bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ intersectează cercul în M astfel încât $m(\sphericalangle AOM) = 120°$, atunci triunghiul ΔABC este isoscel. **(G.M. 4/1989, Ion Predescu)**

6. Două cercuri de raze r_1 şi r_2 ($r_2 < r_1$) şi centre O_1 şi, respectiv, O_2 sunt secanate în A şi B astfel încât $r_2 < O_1O_2 < 2r_2$. Să se arate că şi cercurile cu centrele în A şi B având razele r_1 şi, respectiv, r_2 sunt secante. **(G.M. 9/1984)**

7. Fie A pe coarda $[BC]$ a cercului $\mathcal{C}(O,R)$, $A \neq O$, şi $BC \perp OA$. Să se arate că pentru orice punct $M \in \mathcal{C}(O,R)$, $m(\sphericalangle AMO) \leqslant m(\sphericalangle ABO)$. **(Admitere facultate, 1987)**

8. Tangentele în punctele A şi B la cercul circumscris triunghiului isoscel ΔABC ($[AB] \equiv [AC]$ se intersectează în M. Ce poziţie are dreapta AC faţă de cercul circumscris triunghiului ΔABM? **(etapa judeţeană, Dâmboviţa, 1988)**

9. Fie cercurile $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ şi $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$, tangente exterioare. Notăm cu T_1 şi T_2 punctele de intersecţie ale tangentelor duse din O_1 la $\mathcal{C}_2$. Să se demonstreze că $r_1 = r_2$, dacă şi numai dacă $\Delta O_1T_1T_2$ este triunghi echilateral. **(etapa judeţeană, Argeş, 1989)**

INDICAŢII. SOLUŢII. RĂSPUNSURI. COMENTARII

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. NUMERE ÎNTREGI. DIVIZIBILITATE ÎN Z

1. A = {–4, –3, –2, – 1, 1, 2}, B = {–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}. **2.** A = {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}, B = {1, 2}. **3.** $x = 1$. **4.** A = {0, 1, 2, 3}, B = {2,3,4,5}, C = {6, 7, 8, 9}, D = {8, 9, 10, 11}. **5.** A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {2, 3, n}, C = {5, 6, n}. **6. b)** $(a, b, c) \in \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$. **7. a)** $3p + 1 = 5k + 2$, de unde $3p = 5k + 1$. Atunci $p = M_5 + 2$ iar $k = M_3 + 1$ şi $3p + 1 = 5k + 2 = M_{15} + 7 = 15m + 7$ ($m \in \mathbb{N}$). $1000 \le 15m + 7 \le 2000 \Rightarrow 67 \le m \le 132$. Sunt 66 de numere. **b)** Conform principiului includerii şi al excluderii avem: $n|A \cup B \cup C| = n|A| + n|B| + n|C| – (n|A \cap B| + n|B \cap C| + n|C \cap A|) + n|A \cap B \cap C|$, $n|X|$ reprezentând numărul elementelor mulţimii X (*cardinalul*). Atunci $n|M| = n|A| + n|B| + n|C|$. $S|A| = S|B| = S|C| = s \in \mathbb{N}^*$, $S|X|$ reprezintă suma elementelor mulţimii X. Din relaţiile de mai sus $S|M| = 3s$, dar $S|M| = 1 + 2 +...+ n = \frac{n(n+1)}{2}$ etc. Deci $3s = \frac{n(n+1)}{2}$. Se analizează cazurile: $n = 3k$; $n = 3k + 1$ şi $n = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}^*$), de unde rezultă că $n \in \{3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, ...\}$. Dacă $n \in \{3, 5, 6, 8\}$ cum n este minim, verifică $n = 8$ şi avem: A = {4; 8}; B = {5; 7} şi C = {1; 2; 3; 6}. **8.** A = {–5}, B = {–8, 12}. **9.** x_0 şi $2000 – x_0$ sunt soluţii ale ecuaţiei date. Soluţia ecuaţiei fiind unică avem $2000 – x_0=x_0$, de unde $x_0 = 1000$, $m = 1001000$. **10.** Termenii şirului $\{a_n\}$ sunt numere naturale de forma $4k+2$, $k \in \mathbb{N}$, iar termenii şirului $\{b_n\}$ sunt numere naturale de forma $4k$ ($k \in \mathbb{N}$). **11.** Dacă $n = 2k$, atunci $\mathrm{N} = k$, iar dacă $n = 2k + 1$ atunci $\mathrm{N} = -k$. **12.** $x \in \mathbb{Z}$; $y, z \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2001 - x \in \mathbb{Z}$. $y, z \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow |y| \ge 1, |z| \ge 1 \Rightarrow \frac{1}{|z|} \le 1, \frac{1}{|y|} \le 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow -2 \le \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le 2 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \in \{-2,-1,0,1,2\}$. $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2 \Rightarrow y = \frac{z}{2z-1} \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow y = z = 1,\ x = 1999$. $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = \frac{z}{z-1} \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow y = z = 2;\ x = 2000$. $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \Rightarrow y = -z \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow y = k,\ z = -k,\ x = 2001$, $k \in \mathbb{Z}^*$. $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-1 \Rightarrow y = -\frac{z}{z+1} \in \mathbb{Z}^*$; $y = z = -2$, $x = 2002$. $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-2 \Rightarrow y = -\frac{-z}{2z+1} \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow y = z = -1$, $x = 2003$. **13. a)** 0, 0, 1 în această ordine. **b)** 2, 0, 0, 1 în această ordine. **14. a)** $U(n) = 5$; **b)** $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot 49 = (4 \cdot 0 + 1) \cdot (4 \cdot 1 – 1) \cdot (4 \cdot 1 + 1) \cdot (4 \cdot 2 – 1) \cdot (4 \cdot 2 + 1) \cdot ... \cdot ... \cdot (4 \cdot 12 – 1)(4 \cdot 12 + 1) = (M_4 + 1) \cdot (4 \cdot 1 – 1) \cdot (4 \cdot 2 – 1) \cdot ... \cdot (4 \cdot 12 – 1) = M_4 + 1$. Dar $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 49 = M_{25}$ şi ultimele două cifre ale numărului $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 49$ sunt 2 şi 5 în această ordine, deci penultima cifră a lui n este 7. **c)** $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 49 = (8 \cdot 0 + 1) \cdot (8 \cdot 0 + 3) \cdot (8 \cdot 0 + 5) \cdot (8 \cdot 0 + 7) \cdot (8 \cdot 1 + 1) \cdot (8 \cdot 1 + 3) \cdot ... \cdot (8 \cdot 5 + 1) \cdot (8 \cdot 5 + 3) \cdot (8 \cdot 5 + 5) \cdot (8 \cdot 5 + 7) \cdot (8 \cdot 6 + 1) = M_8 + 1$, pentru că $(M_8 + 1) \cdot (M_8 + 3) \cdot (M_8 + 5) \cdot (M_8 + 7) = M_8 + 105 = M_8 + 1$, dar $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 49 = M_{125}$. Deci $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 49$ are ultimele trei cifre 6, 2, 5 în această ordine, iar n are antepenultima cifră 3. **15.** 5^8 are ultimele 5 cifre 9, 0, 6, 2, 5 în această ordine. 5^{8k}, unde $k \in \mathbb{N}^*$, are ultimele 5 cifre tot 9, 0, 6, 2, 5 în această ordine. $5^5 \cdot 5^{8k}$ ($k \in \mathbb{N}^*$) are ultimele 5 cifre 0, 3, 1, 2, 5 în această ordine. **16.** $p = n^2 - n + 5n - 5 = n(n-1) + 5(n-1) = (n-1)(n+5)$. Dacă p este prim, e necesar ca $n - 1 \in \{\pm 1\}$ sau $n + 5 \in \{\pm 1\}$. Se obţine $n \in \{-6, -4, 0, 2\}$. **17.** Avem: $n^2 + 18n + 64 = (n+9)^2 - 17 = m^2\ (m \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (n+9-m)(n+9+m) = 17 = (-17)\cdot(-1) = (-1)\cdot(-17) = 17 \cdot 1$. În final se obţine $n \in \{-18, 0\}$. **18.** Avem $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10 = 5(n^2+2)$. Dacă numărul $5(n^2+2)$ este pătrat perfect atunci în mod necesar $5 / n^2 + 2$. Dar $U(n^2+2) \in \{1,2,3,6,7,8\}$, deci $5 \nmid n^2 + 2$. **19.** Presupunem că $a_i < 0$ şi $a_j > 0$, oricare ar fi $i \ne j$ (i fixat). Fie două inegalităţi consecutive ce nu-l conţin pe a_i. Din prin inducţie după n. Cazul $n = 2$ este evident. Fiind date $n + 1$ segmente, considerăm o mulţime de n segmente şi un al $n + 1$ - lea segment a. Mulţimea celor n segmente, conform inducţiei, au un punct (un segment comun b). Dacă $a \cap b \neq \varnothing$, problema este rezolvată. Dacă $a \cap b = \varnothing$, atunci există $A \in d$ astfel încât segmentele a şi b sunt separate de A. Orice segment din mulţimea celor n puncte are un punct în comun cu a şi unul cu b deci conţine punctul A. Prin urmare, A aparţine intersecţiei celor n segmente și $A \in b$ – nu convine. Deci cele $n + 1$ segmente au un punct în comun. **62.** Dacă proiectăm toate poligoanele pe aceeaşi dreaptă, cum proiecţia fiecărui poligon este un segment, rezultă că toate segmentele au cel puţin un punct comun (este suficient să considerăm un sistem ortogonal de coordonate şi, pe axa absciselor luăm cel mai mic dintre extremităţile din dreapta ale acestor segmente). Prin acest punct ducem perpendiculara pe axa absciselor.

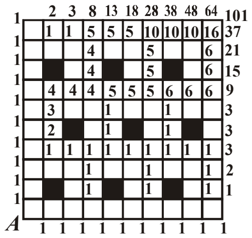


Fig. 274

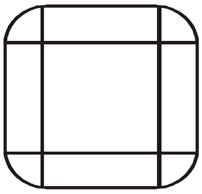


Fig. 275

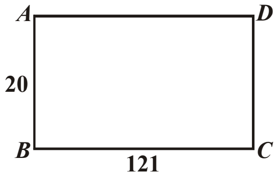


Fig. 276

63. Considerăm două direcţii de parcurgere a „traseului”: respectiv „dreapta” şi „sus” (**fig. 274**). Notăm coordonatele nodurilor reţelei într-un reper în care $A(0,0)$ şi $B(10,10)$. Numărul de drumuri minime care uneşte A cu un punct $M\,(x + 1, y + 1)$ este egal cu suma drumurilor minime ce unesc A cu $M'(x, y + 1)$ şi a celor care unesc A cu $M''(x + 1, y)$. Astfel, scriem în fiecare nod numărul de drumuri minime care îl unesc pe acesta cu punctul A. **64.** Locul geometric al punctelor la distanţă mai mică de $\frac{1}{2}$ de interiorul pătratului este format din 4 dreptunghiuri de dimensiuni 1; $\frac{1}{2}$ şi 4 sferturi de cerc de rază $\frac{1}{2}$. (**fig. 275**) Suma ariilor acestor 120 de locuri geometrice şi interioarele pătratelor este

$$120\left(1+4\cdot\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=360+30\pi<360+30\cdot 3{,}2=456=24\cdot 19$$. Deci pătratele rotunjite nu pot acoperi interiorul dreptunghiului de dimensiuni 24 x 19 centrat în dreptunghiul iniţial. Orice punct neacoperit poate fi ales ca centrul discului cerut. **65.** Fie dreptunghiul $ABCD$, unde $AB = 20$, $BC = 121$. (**fig. 276**) Considerăm o coloană de dimensiuni 1 x 20. Dreptunghiul este format de 121 de astfel de coloane. Diagonala BD intersectează unul sau două pătrate pentru fiecare coloană. Diagonala intersectează două pătrate dacă şi numai dacă intersectează în interior un segment orizontal delimitat de o coloană. Cum $(20, 121) = 1 \Rightarrow$ diagonala (BD) nu trece prin nici un nod al reţelei. Deci există $20 – 1 = 19$ coloane pe care diagonala intersectează 2 pătrate, pe restul intersectând doar un singur pătrat. Deci, în total, diagonala BD intersectează în interior $121 + 19 = 140$ pătrate. **66. a)** La orice modificare numărul din centru se măreşte cu 3 şi atunci $4 + 3k = 22$, de unde $k = 6$. **b)** Trebuie să găsim cel mai mic multiplu de 4, de forma $M_3 + 1$. Acesta este 4. **c)** După $2p + 1$ modificări, suma din centru va fi: $4 + 3(2p + 1) = 6p + 7$, număr impar şi concluzia rezultă imediat. **67.** Considerăm icosagonul $[A_1A_2 \ldots A_{20}]$ poziţia vârfurilor fiind în sensul mişcării acelor de ceasornic. Pentagoanele $[A_1A_5A_9A_{13}A_{17}]$, $[A_2A_6A_{10}A_{14}A_{18}]$; $[A_3A_7A_{11}A_{15}A_{19}]$; $[A_4A_8A_{12}A_{16}A_{20}]$ sunt pentagoane regulate. Conform principiului *cutiei* (**Diriclet**), trei din cele 9 vârfuri galbene aparţin unuia din cele 4 pentagoane. Dar oricare trei din vârfurile unui pentagon regulat sunt şi vârfurile unui triunghi isoscel. Problema este încheiată. **68.** Sunt suficiente 4 culori; alb (A); negru (N); galben (G) şi verde (V) deoarece pentru fiecare pătrat 2×2 sunt necesare 4 culori diferite şi pătratul poate fi colorat astfel: Analog se poate colora numai cu patru culori pătratul 16×16 şi în general orice pătrat $2^n \times 2^n$, unde $n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$, pentru că se descompune pătratul în pătrate 2×2. (**fig. 277**).

A	N	A	N
G	V	G	V
A	N	A	N
G	V	G	V

Fig. 277