Costel Chiteş
(coordonator)
Daniela Chiteş
Daniela Heuberger
Nicolae Muşuroia

Matematică

Teme suplimentare
PENTRU CLASA A V-A

SEMESTRUL
1

CORINT

Date despre autori:
COSTEL CHITEȘ – profesor gr. I la Colegiul Național de Informatică „Tudor Vianu” din București, doctor în matematică, lector dr. la Facultatea de Științe ale Educației, cu o activitate de 10 ani ca inspector de matematică în cadrul Inspectoratului Școlar al Municipiului București, membru în comitetul de redacție al „Gazetei Matematice”, redactor al revistei „Arhimede” și al revistei „Argument”; a publicat manuale pentru clasele IX-XII, culegeri de exerciții și probleme și lucrări cu caracter metodic.

DANIELA CHITEȘ – profesor gr. 1 la Școala nr. 79 „Academician Nicolae Teodorescu” din București, metodist, coautor al mai multor auxiliare școlare de matematică pentru gimnaziu, publicate la diferite edituri, cât și autor al unor articole în reviste de specialitate.

DANIELA HEUBERGER – profesor gr. I la Colegiul Național „Gheorghe Șincai” din Baia Mare, autor a mai multor manuale și culegeri pentru clasele de excelență și pentru olimpiadele școlare și al unor probleme propuse pentru diferite concursuri de matematică interjudețene și naționale, având articole și probleme originale publicate în reviste de prestigiu din țară („Gazeta matematică, „R.M.T.”, „Argument”), redactor-șef adjunct al revistei de matematică „Argument”.

NICOLAE MUȘUROIA – profesor gr. I la Colegiul Național „Gheorghe Șincai” din Baia Mare, autor al mai multor manuale și culegeri pentru clasele de excelență și pentru olimpiadele școlare și al unor probleme propuse pentru diferite concursuri de matematică interjudețene și naționale, având articole și probleme originale publicate în reviste de prestigiu din țară („Gazeta matematică”, „R.M.T.”, „Argument”), redactor-șef al revistei de matematică „Argument”.

Redactare și tehnoredactare computerizată: Mihaela Zbarcea
Coperta: Andreea Apostol

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică: teme suplimentare pentru clasa a V-a: semestrul I/
Costel Chiteș, Daniela Chiteș, Daniela Heuberger, Nicolae Mușuroia. -
București: Corint, 2012
ISBN 978-973-135-728-7

I. Chiteș, Costel
II. Chiteș, Daniela
III. Heuberger, Daniela
IV. Mușuroia, Nicolae

51(075.33)

Cuprins

Cuvânt-înainte

În formarea oricărui elev există două praguri (şocuri): trecerea din şcoala primară în gimnaziu şi trecerea din gimnaziu la liceu.

Ne referim la noul colectiv de elevi, la adaptarea la noile cerinţe şi standarde cât şi la volumul de informaţii, modul de procesare, la importanţa actului educaţional pe care familia o susţine.

Considerăm că actualii elevi au un mod mult mai rapid de achiziţionare a informaţiilor în primul rând datorat mijloacelor electronice, gândesc mai rapid şi sunt mai spontani fără a fi totdeauna şi mai profunzi. Este datoria noastră, de părinţi, de educatori, de a dirija în sens pozitiv aceste căutări în domeniul cunoaşterii atunci când acestea există. În caz contrar, trebuie încercate toate formele prin care se poate trezi în elev dorinţa de a învăţa. În acest scop trebuie să punem la contribuţie toate mobilurile posibile: aspiraţia spre mai bine, satisfacţia de a produce bucurie părinţilor, ruşinea de ignoranţă, dezvoltarea spiritului competitiv etc.

Ne dorim ca această lucrare să vină în ajutorul celor ce doresc să treacă de nivelul programelor analitice de matematică, programe care acoperă doar o parte din cunoştinţele necesare unei înţelegeri profunde a matematicii, a frumuseţii ei, a multor aplicaţii în cele mai diverse domenii ale cunoaşterii. Vom încerca să vă invităm în a vă construi propriile portofolii, în care să adăugaţi continuu noi probleme interesante, aplicaţii diverse şi mici incursiuni proprii de cercetare a unor teme. Gazeta matematică şi alte reviste de specialitate vă vor direcţiona, vă vor sprijini în încercările temerare de a performa. Susţinem ideea de a utiliza internetul pentru o rapidă informare asupra unor subiecte, a unor aplicaţii ale matematicii în diverse domenii. Nu trebuie uitat că toate aceste informaţii sunt selectate dintr-o bibliografie specializată. Trebuie să ne deprindem cu modul de a selecta cărţile în funcţie de nivelul la care ne aflăm, de gradul de accesibilitate a acestora, de scopurile studiului nostru. Să ne amintim expresia: „cum este biblioteca aşa este şi persoana care o posedă“. Zborul spre adevăr este imposibil în absenţa elanului, a patosului dionisiac.

Suntem adepţii ideii exprimate sintetic de către Hermann Weyl (Raum, Zeit, Materie ed. a 5-a, Berlin 1923): „Aşa cum orice om trebuie să se străduiască mai întâi să înveţe limba şi scrisul spre a le putea folosi apoi în mod curent pentru exprimarea gândurilor sale, tot astfel, aici, există numai o singură cale pentru a te elibera din sclavia formulelor: trebuie să ajungi la o astfel de dominaţie asupra instrumentului... încât, nestingherit de tehnica formală, să poţi ataca adevăratele probleme... “.

Dezvoltarea raţionamentului, a gândirii matematice, se face în anii de gimnaziu prin aritmetică şi geometrie. Aceste forme sunt considerate de Platon ca entităţi absolut reale, independente de percepţie, susceptibile de a fi definite absolut precis, fiind atemporale.

Pentru oricare transfer de concepte sau metode dintr-un domeniu în altul, matematica, dacă nu este indinspensabilă, este utilă, deoarece modelarea ei permite conceptelor şi metodelor să le separe, să le elibereze, căpătând o relativă independenţă, cu care apoi pot trece în alt domeniu decât cel de origine.

Un expert în rezolvări de probleme – spunea Howard W. Eves – trebuie înzestrat cu două calităţi incompatibile: o imaginaţie neobosită şi o stăruinţă plină de răbdare.

Lucrarea noastră încearcă să sprijine o înţelegere mai clară a conceptelor, să prezinte modele de exerciţii rezolvate, să evidenţieze aplicaţii ale cunoştinţelor asimilate. Am preferat să dezvoltăm dorinţa cercetărilor proprii prin generalizări ale unor proprietăţi, prin incursiuni în istoria matematicii. Considerând că matematica nu este doar un instrument pentru celelalte ştiinţe, ci este un act de cultură indispensabil pentru fiecare dintre noi, am prezentat la finalul lucrării scurte prezentări ale matematicienilor citaţi, lansând elevilor interesaţi alte dezvoltări.

Lectura manualului, parcurgerea notiţelor din clasă, rezolvarea temelor rămân fundamentale pentru elevi. Materialul nostru sperăm să dea o nouă lumină, să deschidă direcţii spre aplicaţii, care în anii următori de şcoală îşi vor arăta rolul. Am ales tipuri importante de probleme pe care le-am analizat şi rezolvat complet, propunând apoi lectorului exerciţii asemănătoare. Am evidenţiat probleme de numărare din motivele mai sus menţionate. Caracterul agreabil al acestora, importanţa lor în aplicaţiile practice, cotidiene, au rolul de a evidenţia utilitatea directă, indispensabilă a unor cunoştinţe de matematică. Dorim ca acest material să ajute elevul de a ajunge de la nivelul manualului la nivelul problematicii concursurilor şi olimpiadelor şcolare. Toate tipurile de probleme selectate cât şi noţiunile teoretice prezentate fac parte din cerinţele concursurilor şcolare.

În lucrare sunt prezentate o serie de exerciţii rezolvate, ca model, iar pentru exerciţiile propuse, la sfârşitul lucrării sunt prezentate indicaţii şi soluţii. Pentru usurinţa umăririi, toate exerciţiile (rezolvate şi propuse) sunt numerotate în continuare.

Am ataşat la final şi tabelul numerelor prime mai mici de 10 000. Invităm cititorul să încerce rezolvarea prin efort propriu a tuturor exerciţiilor şi în cazul nereuşitei să apeleze la indicaţii şi soluţii.

Sugestiile pentru lecturi suplimentare conţin surse deosebite, cărţi de bibliotecă, de care nu te poţi despărţi. Lectura acestora, făcută de mai multe ori, la intervale diferite de timp, îţi dau adevărata lor valoare, crează uneori nostalgii. Aşa cum în literatură există cărţi excepţionale, în toate celelalte domenii lucrurile stau la fel, deci şi în matematică.

Este important ca elevul să se obişnuiască a cerceta singur, a descoperi metode noi de rezolvare, probleme noi, să-şi pună continuu întrebări. Lucrarea noastră ajută în formarea unor deprinderi de lucru independente, în crearea propriilor portofolii. Aceste portofolii sunt evaluate de cadrul didactic şi vor fi completate şi îmbunătăţite continuu în anii de şcoală.

Autorii

1. Operaţii cu numere naturale

1.1. Proprietăţi

Să ne reamintim proprietăţi ale operaţiilor de adunare şi înmulţire a numerelor naturale.

$$2 + 8 = 10,\ 8 + 2 = 10\ .\ \text{Deci } 2 + 8 = 8 + 2.$$

Exerciţii propuse

1. Consideraţi alte perechi a, b de numere naturale şi verificaţi că $a+b = b+a$. Deducem că pentru oricare a, b naturale există egalitatea: $a + b = b + a$, numită proprietatea de **comutativitate a adunării**.

$(4 + 8) + 16 = 12 + 16 = 28$, $4 + (8 + 16) = 4 + 24 = 28$, de unde
$(4 + 8) + 16 = 4 + (8 + 16)$.

2. Consideraţi alte triplete a, b, c de numere naturale şi verificaţi că

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Deducem că pentru oricare a, b, c naturale există egalitatea:

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

numită proprietatea de **asociativitate a adunării.**

Datorită acestor două proprietăţi, putem, într-o sumă finită de numere naturale, să schimbăm ordinea termenilor cum dorim sau să punem oricâte paranteze, rezultatul pe care-l vom obţine este acelaşi.

3. Fiind date patru numere naturale a, b, c, d să se arate că:

$$a + b + c + d = (a + b) + (c + d).$$

Există un număr special, notat cu 0, număr natural pentru care avem:

$$0 + a = a + 0 = a,$$

pentru oricare număr natural a. Din acest motiv, 0 reprezintă **elementul neutru** pentru numerele naturale considerate **faţă de operaţia de adunare.**

$5 \cdot 7 = 35$, $7 \cdot 5 = 35$. Deci $5 \cdot 7 = 7 \cdot 5$.

4. Consideraţi alte perechi a, b de numere naturale şi verificaţi că $a \cdot b = b \cdot a$. Deducem că pentru oricare a, b naturale există egalitatea: $a \cdot b = b \cdot a$, numită proprietatea de **comutativitate a înmulţirii.**

$(3 \cdot 4) \cdot 5 = 12 \cdot 5 = 60$, $3 \cdot (4 \cdot 5) = 3 \cdot 20 = 60$, de unde $(3 \cdot 4) \cdot 5 = 3 \cdot (4 \cdot 5)$

5. Consideraţi alte triplete a, b, c de numere naturale şi verificaţi că:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Deducem că pentru oricare a, b, c naturale există egalitatea: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, numită proprietatea de **asociativitate a înmulţirii**.

Datorită acestor două proprietăţi, putem, într-un produs finit de numere naturale, să schimbăm ordinea factorilor cum dorim sau să punem oricâte paranteze, rezultatul pe care-l vom obţine este acelaşi.

6. Fiind date patru numere naturale a, b, c, d să se arate că:

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = (a \cdot b) \cdot (c \cdot d)\,.$$

Rezolvare. $a \cdot b \cdot c \cdot d = (a \cdot b \cdot c) \cdot d = [(a \cdot b) \cdot c] \cdot d = (a \cdot b) \cdot (c \cdot d)$

Există un număr special, notat cu 1, număr natural pentru care avem:

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a,$$

pentru oricare număr natural a. Din acest motiv, 1 reprezintă **elementul neutru** pentru numerele naturale considerate **faţă de operaţia de înmulţire.**

$3 \cdot (5+4) = 3 \cdot 9 = 17$; $3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 15 + 12 = 27$. Deci $3 \cdot (5+4) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4$

7. Consideraţi alte perechi a, b, c de numere naturale şi verificaţi că:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad (a+b) \cdot c = ac + bc.$$

Deducem că pentru oricare a, b, c naturale există egalităţile:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad (a+b) \cdot c = ac + bc$$

numite proprietatea de **distributivitate a înmulţirii faţă de adunare.**

Acestea sunt utilizate ca legi de desfacere a parantezelor. Citite de la dreapta la stânga se numesc reguli de dare de factor comun.

8. Fiind date patru numere naturale a, b, c, d să se arate că:

$$a\,(b+c+d) = ab + ac + ad.$$

Generalizare.

9. Fiind date patru numere naturale a, b, c, d să se arate că:

$$(a+b)\,(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

10. Să se calculeze: $2013 \cdot 5447 + 2013 \cdot 1553 - 7000 \cdot 2012$.

11. Fie m, n numere naturale nenule şi $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$ numere naturale.

a) Să se calculeze produsul $P = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\,(b_1 + b_2 + \ldots + b_m)$;

b) Câţi termeni are produsul P ?

1.2. Relaţia de ordine a numerelor naturale

Fiind date două numere naturale a, b definim $a < b$ dacă există c natural nenul pentru care $b = a + c$. Vom citi: a mai mic strict decât b.

Exemplu

$2 < 3$ deoarece există numărul nenul 1 pentru care $3 = 2 + 1$.

Putem scrie: $0 < 1 < 2 < 3 < \ldots < n < n+1 < \ldots$.

Remarcăm că din relaţia $a < b$ rezultă existenţa unui c natural nenul pentru care $b = a + c$, deci $b - a = c$, $c > 0$ deci $b - a > 0$.

Reciproc, dacă $b - a > 0$, notăm $b - a = c$, $c > 0$, de unde $b = a + c$, adică $a < b$.

Pentru $a < b$ mai putem scrie $b > a$ şi citim b mai mare strict decât a.
Exemplu. $5 > 4 > 3 > 2 > 1 > 0$.

Date numerele naturale a, b, definim $a \leq b$ dacă $a < b$ sau $a = b$, vom citi a mai mic sau egal cu b.

Exerciţii rezolvate

12. Date numerele naturale a, b, c, pentru care $a < b$ şi $b < c$ rezultă $a < c$?

Rezolvare. Există d, e numere naturale nenule pentru care $b = a + d$, $c = b + e$, de unde $c = a + (d + e)$, adică $a < c$

Dacă a, b sunt numere naturale, atunci din $a \cdot b = 0$ rezultă $a = 0$ sau $b = 0$.
Această proprietate se aplică de exemplu atunci când rezolvăm ecuaţii.

13. Să se rezolve ecuaţia: $(x - 2)(x - 3) = 0$.

Rezolvare. Conform proprietăţii precedente, vom avea: $x - 2 = 0$ sau $x - 3 = 0$, adică $x = 2$ sau $x = 3$.

Exerciţiu propus

14. Fiind date trei numere naturale a, b, c din egalitatea $a \cdot b \cdot c = 0$ rezultă $a = 0$ sau $b = 0$ sau $c = 0$.

Exerciţiu rezolvat

15. Să se arate că au loc proprietăţile:
a) Dacă a, b, k sunt numere naturale, $a < b$, $k > 0$ atunci $ak < bk$.
b) Dacă a, b, c, d sunt naturale, $a < b$ şi $c < d$ atunci $a + c < b + d$ şi $ac < bd$.
c) Dacă a, b sunt naturale pentru care avem $a < b$ atunci $a + 1 \leq b$.
d) Dacă a, b, c, d sunt naturale, $a < b$ şi $c \leq d$ atunci $a + c < b + d$.

Rezolvare

a) Există c natural nenul pentru care $b = a + c$, de unde $bk = ak + ck$. Cum c, k sunt naturale nenule, rezultă $ck \neq 0$, adică $ck > 0$. Atunci $bk > ak$ sau echivalent $ak < bk$.

b) Avem $b - a > 0$, $d - c > 0$, deci $b + d - (a + c) > 0$, adică $b + d > a + c$.

Din $a < b$, prin înmulţire cu c se obţine $ac \leq bc$, deoarece c poate fi egal cu zero. Din $c < d$ rezultă $bc < bd$. Utilizând cele două inegalităţi rezultă $ac < bd$.

c) Există c natural nenul pentru care $b = a + c$. Cum $c \geq 1$, rezultă $c + a \geq a + 1$, deci $b \geq a + 1$.

d) Avem $b - a > 0$, $d - c \geq 0$, deci $b + d - (a + c) > 0$, adică $b + d > a + c$.

Exerciţii propuse

16. Fie n un număr natural nenul. Există un număr finit de numere naturale cuprinse între n şi 0 .

17. Scriem numerele naturale nenule de la 1 până la 2012 unele lângă altele astfel: $123\ldots91011\ldots99100\ldots20112012$. Câte caractere au fost utilizate ?

Notă

Proprietăţile expuse mai sus se demonstrează riguros în cadrul axiomaticii lui Giuseppe Peano a numerelor naturale, care poate fi studiată mai târziu în anii de liceu sau facultate.

1.3. Calcule cu sume şi produse

Ne propunem pentru început să calculăm suma: $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 20$.

Putem începe prin a calcula astfel: $1 + 2 = 3$, $3 + 3 = 6, 6 + 4 = 10, \ldots$ Este anevoios şi există pericolul continuu de a greşi.

Vom proceda altfel, mult mai ingenios. Vom recurge la o poveste despre matematicianul german C. F. Gauss (1777-1855).

Se spune că micuţul Gauss, elev fiind în clasa a III-a, a primit la o lucrare calculul sumei S. Foarte rapid Gauss efectuează calculul, scrie rezultatul pe propria tăbliţă apoi o predă învăţătorului său. Învăţătorul îl priveşte cu neîncredere pentru „graba sa“ fără a citi rezultatul. Abia după ceva vreme, când toţi elevii clasei predau propriile tăbliţe, învăţătorul rămâne plăcut impresionat deoarece rezultatul găsit de micuţul Gauss era corect.

Iată raţionamentul:

$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 18 + 19 + 20$. Apoi scrie termenii sumei descrescător:

$S = 20 + 19 + 18 + \ldots + 3 + 2 + 1$. Adunând termenii situaţi unii sub alţii determinăm: $2 \cdot S = (1 + 20) + (2 + 19) + (3 + 18) + \ldots + (19 + 2) + (20 + 1)$ sau $2 \cdot S = 21 \cdot 20$, de unde $S = 210$.

Exerciţiu rezolvat

18. Să se calculeze sumele:

a) $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$;

b) $T = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$, unde n este un număr natural nenul;

c) $U = 2 + 4 + 6 + \ldots + 100$;

d) $H = 3 + 6 + 9 + \ldots + 99$;

e) $D = 51 + 52 + \ldots + 100$;

f) $M = 2013 + 2014 + 2015 + \ldots + 2070$;

Indicaţii

a) $S = 100+99+\ldots+2+1$. Prin adunare obţinem $2S = (1 + 100)+(2 + 99)+ \ldots + (100 + 1)$ sau $2S = 101 \cdot 100$, deoarece sunt 100 de paranteze egale cu 101. Rezultă $S = 101 \cdot 50 = 5050$.

b) $T = n + (n - 1) + (n - 2) + \ldots + 2 + 1$.

Prin adunare obţinem $2S = (1 + n) + (1 + n) + \ldots + (1 + n)$, suma având n termeni. Deci $2S = n\,(n + 1)$, de unde $S = n\,(n + 1) : 2$. Putem scrie rezultatul şi sub formă de fracţie: $S = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

c) $U = 2\,(1 + 2 + 3 + \ldots + 50) = 2 \cdot \dfrac{50 \cdot 51}{2} = 51 \cdot 50 = 2550$.

d) $H = 3\,(1 + 2 + 3 + \ldots + 33) = 3 \cdot \dfrac{33 \cdot 34}{2} = 99 \cdot 17 = 1683$.

e) *Metoda* 1

$D = (1 + 2 + 3 + \ldots + 50 + 51 + 52 + \ldots + 100) - (1 + 2 + 3 + \ldots + 50) =$
$= \dfrac{100 \cdot 101}{2} - \dfrac{50 \cdot 51}{2} = 5050 - 1275 = 3775.$

Metoda 2

$D = (50 + 1) + (50 + 2) + \ldots + (50 + 50) = 50 \cdot 50 + (1 + 2 + \ldots + 50) =$
$= 2500 + \dfrac{50 \cdot 51}{2} = 2500 + 1275 = 3775.$

f) Vom prefera aplicarea metodei 2, de la pct. e):

$M = (2012+1)+(2012+2)+\ldots+(2012+58) = 2012\cdot 58+(1+2+\ldots+58) =$
$= 116696 + \dfrac{58 \cdot 59}{2} = 116696 + 1711 = 118407.$

Exerciţiu propus

19.

Să se calculeze sumele:

a) $A = 1 + 2 + 3 + \ldots + 200$;
b) $B = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2n$, unde n este un număr natural nenul;
c) $C = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 3n$, unde n este un număr natural nenul;
d) $D = 4 + 8 + 12 + \ldots + 400$;
e) $E = 55 + 60 + 65 + 70 + \ldots + 150$;
f) $F = 304 + 305 + \ldots + 500$;
g) $G = 3 + 7 + 11 + \ldots + 199$;
h) $H = \underbrace{11\ldots1}_{9} + \underbrace{11\ldots1}_{8} + \ldots + 11 + 1.$

Dacă n este un număr natural nenul, vom nota prin $n!$ (se citeşte n factorial) produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Deci: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Pentru $n = 0$ se consideră: $0! = 1$.

Exemple

$1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Exerciţiu rezolvat

20. Să se calculeze:

a) $5!$; b) $6!$; c) $7!$; d) câte cifre are numărul $10!$?

Rezolvare

a) 120; b) 720; c) 5040; d) $10! = 3628800$, deci numărul are 7 cifre.

Exerciţiu propus

21. Să se calculeze:

a) $7! - 6!$; b) $10! + 11!$; c) $5 \cdot 5!$; d) $12! : 10!$.

1.4. Teorema împărţirii cu rest

Fiind date numerele naturale a, b unde $b \neq 0$, există şi sunt unice numerele naturale q, r pentru care avem $a = b \cdot q + r$, unde $r < b$.

a se numeşte **deîmpărţit**, b se numeşte **împărţitor**, q se numeşte **cât**, r se numeşte **rest**.

Exemplu

Să se efectueze împărţirea lui 295 la 7. Avem $295 = 7 \cdot 42 + 1$.

Observaţie

De exemplu putem scrie egalitatea: $295 = 7 \cdot 41 + 8$. Nu reprezintă teorema împărţirii cu rest deoarece $r = 8 > 7$. Reţinem şi unicitatea numerelor q, r prin aplicarea teoremei.

În cazul când $r = 0$, avem $a = b \cdot q$. Vom spune că împărţirea lui a prin b s-a realizat exact.

Exerciţii propuse

22. Să se completeze tabelul următor, în care d, $\hat{\imath}$, c, r sunt respectiv: deîmpărţitul, împărţitorul, câtul şi restul împărţirilor:

d	i	c	r
27	10	2	7
39	60		
100	7		
110		12	2
	9	8	3

23. Câte numere naturale de trei cifre există dacă împărţite la 19 dau restul 15 ?

24. Să se determine restul împărţirii numărului $a = 14! + 300$ la $b = 182$.

Exerciţii rezolvate

25. a) Să se determine resturile posibile ale împărţirii unui pătrat perfect la 7.

b) Să se determine toate numerele naturale n pentru care $n! + 241$ este pătrat perfect.

Rezolvare

a) Mai întâi trebuie să ridicăm la pătrat:

$$(7k + r)^2 = (7k + r)(7k + r) = 49k^2 + 7kr + 7kr + r^2 = 7\left(7k^2 + 2kr\right) + r^2,$$

deci restul împărţirii lui $(7k + r)^2$ la 7 este egal cu restul împărţirii lui r^2 prin 7.

Vom crea tabelul:

n	0	1	2	3	4	5	6
n^2	0	1	4	2	2	4	1

Tragem concluzia că orice număr de forma $7k+3$, sau $7k+5$ sau $7k+6$ nu este pătrat perfect.

b) Pentru $n \geq 7$, numărul $n! + 241$ este de forma $7k+3$, deci nu este pătrat perfect. Vom verifica doar valorile naturale mai mici decât 7 şi determinăm:

$n = 5$, avem $241 + 120 = 361 = 19^2$;

$n = 6$, avem $241 + 720 = 961 = 31^2$.

Exerciţiu propus

26. a) Să se determine resturile posibile ale împărţirii unui pătrat perfect la 5.

b) Să se determine toate numerele naturale n pentru care $n! + 48$ este pătrat perfect.

Definiţie. *Fiind date numerele naturale a, b, spunem că a divide b şi scriem $a \mid b$ dacă există c număr natural pentru care $b = a \cdot c$. În acest caz, a se numeşte* ***divizor*** *al lui b, iar b se numeşte* ***multiplu*** *al lui a.*

În caz contrar, spunem că a nu divide b şi scriem $a \nmid b$.

Exemple

$2|6$ deoarece există numărul natural 3 pentru care $6 = 2 \cdot 3$, deci 2 este un divizor al lui 6, sau spunem că 6 este un multiplu al lui 2.

$3 \nmid 10$ deoarece pentru orice număr natural c avem $10 \neq 3 \cdot c$.

1.5. Numere prime

Definiţie. *Un număr natural p , $p \geq 2$ se numeşte* ***prim*** *dacă are ca divizori doar pe 1 şi p.*

Exemple

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

Un număr natural $n \geq 2$ care nu este prim se numeşte compus.

Ciurul lui Eratostene

Reamintim că ciur reprezintă sită. În ciur (sită) vor rămâne doar numerele prime mai mici decât n.

Matematicianul alexandrin Eratostene a dat o metodă prin care putem determina toate numerele prime mai mici decât un număr natural dat.

Metoda este ingenioasă şi este utilizată cu eficienţă şi azi. Fie n un număr natural fixat, $n \geq 2$. Scriem numerele naturale $2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n-1, n$. Păstrăm numărul 2 şi marcăm toate numerele multiplu de 2 care sunt mai mici decât n. După marcarea numerelor, primul număr nemarcat este 3. El este prim deoarece nu este divizibil cu 2. Lăsăm nemarcat numărul 3 şi marcăm toţi multiplii lui 3 ce sunt mai mici decât n. Unele numere au fost deja marcate fiind multipli de 2. La următorul pas, primul număr nemarcat este 5. El este prim nefiind divizibil cu 2 sau cu 3. Lăsăm numărul 5 nemarcat şi marcăm toţi multipli de 5. Continuăm procedeul, la sfârşit, se obţine o secvenţă de numere nemarcate; acestea reprezintă numerele prime mai mici sau egale cu n. Această metodă de cernere a numerelor este cunoscută sub denumirea de *ciurul lui Eratostene*.

Notă

Pe baza acestui principiu au fost construite tabele de numere prime. În cazul numerelor mari au fost utilizate calculatoare performante. Astfel, în Los Alamos Scientific Laboratory au fost determinate în acest fel toate numerele prime până la 100 000 000. S-a demonstrat că şirul numerelor prime este infinit încă din Antichitate.

La sfârşitul lucrării sunt date toate numerele prime mai mici decât 10 000.

Exerciţii propuse

27. Prin utilizarea ciurului lui Eratostene, să se determine toate numerele prime mai mici decât 100.

28. Care sunt numerele prime de două cifre care au suma cifrelor egală cu 8?

Exerciţiu rezolvat

29. Care dintre următoarele numere: 181, 187 este prim?

Rezolvare. O metodă care stabieşte prin calcul dacă un număr este prim, constă în împărţirea numărului dat la numere prime, în ordine crescătoare până când câtul devine mai mic decât împărţitorul.

Dacă nicio împărţire nu s-a efectuat exact, numărul considerat este prim. În caz contrar, numărul nu este prim.

Împărţim numărul 181 respectiv la 2, 3, 5, 7, 11, 13 nu obţinem restul 0, deci 181 nu se divide cu aceste numere prime. Ne oprim şi tragem concluzia că 181 este prim, deoarece prin împărţirea lui 181 la 17, câtul devine mai mic decât împărţitorul.

Împărţim numărul 187 respectiv la 2, 3, 5, 7 nu obţinem restul 0, deci nu se divide prin niciunul dintre acestea. Dar $187 = 11 \cdot 17$, deci este compus.

Exerciţii propuse

30. Să se decidă care dintre următoarele numere: 221, 551, 557, 1591 este prim?

31. Să se determine două numere prime a căror sumă este 949.

32. Există două numere prime a căror sumă este egală cu 1593?

33. Cu ajutorul tabelei de numere prime, să se determine două numere prime a căror sumă este egală cu: 88.

34. a) Să se determine numerele prime de forma $3k$, unde k este număr natural.

b) Să se determine primele cinci numere prime de forma $3k + 1$.

c) Să se determine primele cinci numere prime de forma $3k + 2$.

35. Să se determine n număr natural pentru care n, $n+2$, $n+4$ sunt numere prime.

36. a) Să se determine toate numerele prime de forma $5k$, unde k este număr natural.

b) Să se determine primele cinci numere prime respectiv de forma: $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$, $5k+4$.

37. Să se determine n număr natural pentru care n, $n+2$, $n+6$, $n+8$, $n+14$ sunt numere prime.

38. Aflaţi numerele naturale nenule n care împărţite la 18 dau restul un număr prim, de două ori mai mic decât câtul.

(G.M.-B nr.7-8-9/2010)

Exerciţii rezolvate

39. Să se arate că au loc afirmaţiile:
a) Pentru oricare a număr natural $a \mid a$;
b) Dacă a, b sunt numere naturale, $a \mid b$ şi $b \mid a$ atunci $a = b$;
c) Dacă a, b, c sunt numere naturale, $a \mid b$, $b \mid c$ atunci $a \mid c$.

Rezolvare. a) Există numărul 1 pentru care $a = 1 \cdot a$, de unde deducem $a \mid a$ (reflexivitate).

b) Există c, d numere naturale pentru care $b = a \cdot c$, $a = b \cdot d$. Atunci $b = b \cdot (c \cdot d)$. Dacă $b = 0$, atunci $a = 0$, deci $a = b$. Dacă $b \neq 0$, atunci $c \cdot d = 1$, de unde $a = b$ (antisimetrie).

c) Există d, e numere naturale pentru care $b = a \cdot d$, $c = b \cdot e$, de unde $c = a \cdot (d \cdot e)$, adică $a \mid c$ (tranzitivitate).

40. Să se arate că au loc afirmaţiile:
a) Dacă $a|b$ şi $a|c$ atunci $a|bt \pm cl$, unde t, l sunt numere naturale.
b) Dacă $a|b \pm c$ şi $a|b$ atunci $a|c$.
c) Dacă $a|b$, c este un număr natural atunci $a|bc$;
d) $1|a$, pentru oricare număr natural a.
e) $a|0$ pentru oricare a număr natural.
f) Dacă $0|a$ atunci $a = 0$.

Rezolvare. a) $b = ak$, $c = at$, atunci $bt \pm cl = a\,(kt \pm tl)$. b) Fie $a|b+c$, $a|b$, atunci $b + c = a \cdot d$, $b = a \cdot e$, de unde $c = a\,(d - e)$. Rezultă $a|c$; c) $b = a \cdot d$, de unde $bc = a \cdot (dc)$. Rezultă $a|bc$; d) $a = 1 \cdot a$, de unde $1|a$; e) Există numărul natural 0 pentru care $0 = a \cdot 0$; f) Există un număr natural b pentru care $a = 0 \cdot b$, de unde $a = 0$.

Exerciţiu propus

41. Este adevărată afirmaţia: dacă a, b, c sunt numere naturale, $a \nmid b$ şi $a \nmid c$ atunci $a \nmid b + c$?

Definiţii

*Un număr natural de forma $n = 2k$, k număr natural, se numeşte **număr par**.*