Marius Burtea **Georgeta Burtea**

Valentin Nicula ▪ Camelia Apostoae ▪ Carmen Axon ▪ Daniela Buzincu ▪ Gheorghe Cihodariu
Elena Cimpoieru ▪ Marilena Ciontescu ▪ Mihaela Chiriac ▪ Radu Copoiu ▪ Maria Coşa
Francisc Coşa ▪ Maria Dan ▪ Adela Dimov ▪ Mihaela Dinescu ▪ Ramona Dumitru
Sorin Radu Dumitrică ▪ Luiza Encuna ▪ Antoaneta Fenoghen ▪ Ion Frujină ▪ Gabriela Hogaş
Gabriela Iscru ▪ Viorica Lazăr ▪ Oana Leaută ▪ Marius Mâinea ▪ Gheorghiţa Mihai
Daniela Mihalache ▪ Silvia Muşătoiu ▪ Mihael Mihalcea ▪ Vasile Dilimoţ Niţă ▪ Ramona Preda
Paraschiva Săndulescu ▪ Marius Stanciu ▪ Ionel Stănică ▪ Elena Stoica ▪ Nadia Daniela Taclit
Tatiana Voicu ▪ Lucia Ungureanu

MATEMATICĂ

Clasa a IX-a

FILIERA TEORETICĂ
Specializarea matematică-informatică

- Breviar teoretic
- Exerciţii şi probleme rezolvate
- Exerciţii şi probleme propuse
- Teste de evaluare a cunoştinţelor

CAMPION

CUPRINS

Capitolul I

MULȚIMI ȘI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1 *MULȚIMEA NUMERELOR REALE*

1.1 OPERAȚII CU NUMERE REALE. ORDONAREA NUMERELOR REALE

Breviar teoretic

1. **Adunarea**: este operația care asociază la fiecare pereche (x,y) de numere reale, numărul real $x+y$ numit suma lui x cu y.

Pentru orice numere reale a,b,c au loc proprietățile:

a) $a+b=b+a$ (*comutativitatea*)

b) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (*asociativitatea*)

c) $a+0=0+a=a$ (0 este *element neutru* la adunare)

d) $a+(-a)=(-a)+a=0$ (orice număr real a are un opus, notat $-a$)

2. **Înmulțirea**: este operația care asociază la orice pereche (x,y) de numere reale, numărul xy numit produsul lui x cu y.

Pentru orice numere reale x,y,z au loc proprietățile:

a) $x\cdot y=y\cdot x$ (*comutativitatea*)

b) $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ (*asociativitatea*)

c) $x\cdot 1=1\cdot x=x$ (1 este *element neutru* la înmulțire)

d) $x\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\cdot x=1,\ x\neq 0$ (orice număr real nenul x, are un invers notat $\frac{1}{x}$)

e) $x\cdot(y+z)=xy+xz$ (înmulțirea este distributivă față de adunare)

- **Diferența** numerelor x,y este numărul $x-y$ cu proprietatea că $x-y=x+(-y)$.
- Dacă $x,y\in\mathbb{R},\ y\neq 0$, se definește *câtul* numerelor x și y, notat $\frac{x}{y}$ sau $x:y$, cu proprietatea că $\frac{x}{y}=x\cdot\frac{1}{y}$.

3. **Puterea cu exponent întreg.**

- Dacă $a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow a^n=\underbrace{a...a}_{n\ ori};\ a^0=1$.
- Dacă $a\in\mathbb{R}^*$ și $n\in\mathbb{N}\Rightarrow a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.
- Dacă $a,b\in\mathbb{R}$ și $m,n\in\mathbb{Z}$, atunci au loc proprietățile:

a) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ b) $a^m:a^n=a^{m-n}$ c) $(a^m)^n=a^{mn}$

d) $a^m \cdot b^m = (ab)^m$ e) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

4. **Rădăcina pătrată** a unui număr real pozitiv x este numărul real pozitiv, notat $\sqrt{x}$, al cărui pătrat este notat cu x.

- Reguli de calcul cu radicali. Fie $a, b \in (0, +\infty)$

a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ b) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ c) $\left(\sqrt{a}\right)^m = \sqrt{a^m}$

d) $c\sqrt{x} = \begin{cases} \sqrt{c^2 x}, & c \geq 0,\ x \geq 0 \\ -\sqrt{c^2 x}, & c < 0,\ x \geq 0 \end{cases}$ e) $\sqrt{x^2} = |x|$ f) $\sqrt{0} = 0.$

5. **Ordonarea numerelor reale**

- a este *mai mic* ca $b\,(a < b)$ dacă pe axa numerelor punctul $A(a)$ este la stânga punctului $B(b)$.
- a este *mai mic sau egal* cu $b\,(a \leq b)$ dacă $a < b$ sau $a = b$.
- Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, atunci $a < b$ sau $a = b$ sau $a > b$ (legea de trihotomie).

- Proprietăţi ale relaţiei '$\leq$' (relaţia de ordine pe $\mathbb{R}$)

a) Reflexivitatea: $a \leq a$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
b) Antisimetria: $a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b$.
c) Tranzitivitatea: $a \leq b$, $b \leq c \Rightarrow a \leq c$.
d) Pentru orice $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x \leq y$ sau $y \leq x$.

- Alte proprietăţi:

e) $a \leq b \Rightarrow a + x \leq b + x,\ \forall a, b, x \in \mathbb{R}$ f) $a \leq b \Rightarrow ax \leq bx,\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ x \geq 0$

g) $a \leq b,\ x < 0 \Rightarrow ax \geq bx$ h) $a \leq b \Rightarrow -a \geq -b$

i) $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},\ \forall a, b \in (0, \infty)$. (inegalitatea mediilor)

Exerciţii şi probleme rezolvate

1. Să se efectueze:

a) $\left(\frac{7}{48} + \frac{13}{24} - \frac{3}{4}\right) \cdot 6\frac{2}{5} - \frac{1}{10}$. b) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{14}{11} : \frac{33}{484} - (-2)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 : \frac{4}{9}$.

Soluţie

a) Se aduce la acelaşi numitor în paranteză şi se introduce întregul în fracţie. Se obţine succesiv:

$$\left(\frac{7}{48} + \frac{13}{24} - \frac{3}{4}\right) \cdot 6\frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \left(\frac{7}{48} + \frac{26}{48} - \frac{36}{48}\right) \cdot \frac{32}{5} - \frac{1}{10} = \frac{-3}{48} \cdot \frac{32}{5} - \frac{1}{10} = -\frac{3}{3} \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{10} = -\frac{2}{5} - \frac{1}{10} =$$

$$= \frac{-4-1}{10} = -\frac{1}{2}.$$

b) Avem succesiv: $\left(-\frac{3}{7}\right) \cdot \frac{14}{11} \cdot \frac{484}{33} - (-8) - \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{4} = -\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{44}{3} + 8 - 1 = -\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} + 7 =$

2. Să se efectueze: a) $4^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^7\cdot 16^5$; b) $\frac{\left(4^2\right)^{-3}}{3^2}\cdot\frac{\left(2^3\right)^7}{6^2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^7$.

Soluție

Folosim operațiile cu puteri cu aceeași bază.

a) $4^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^7\cdot 16^5=\left(2^2\right)^2\cdot\frac{1}{2^9}\cdot\frac{1}{\left(2^3\right)^7}\cdot\left(2^4\right)^5=2^4\cdot\frac{1}{2^9}\cdot\frac{1}{2^{21}}\cdot 2^{20}=\frac{2^4\cdot 2^{20}}{2^9\cdot 2^{21}}=\frac{2^{24}}{2^{30}}=$

$=2^{24-30}=2^{-6}=\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}$.

b) Avem succesiv: $\frac{4^{-6}}{3^2}\cdot\frac{2^{21}}{(3\cdot 2)^2}\cdot\frac{3^7}{2^7}=\frac{\left(2^2\right)^{-6}}{3^2}\cdot\frac{2^{21}}{3^2\cdot 2^2}\cdot\frac{3^7}{2^7}=\frac{2^{-12}\cdot 2^{21}\cdot 3^7}{3^2\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 2^7}=\frac{2^9\cdot 3^7}{2^9\cdot 3^4}=\frac{3^7}{3^4}=$

$=3^{7-4}=3^3=27$.

3. Se dau numerele reale: $a=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$; $b=\sqrt{4}+\sqrt{8}-\sqrt{12}$ și $c=3\sqrt{2}$.

Să se calculeze: a) $2a-b$. b) $(2a-b)^2-c^2$.

Soluție

a) Scriem numărul b mai simplu scoţând factori de sub radical și obținem: $b=2+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}$.

Rezultă că $2a-b=2\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\left(2+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)=2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

b) $(2a-b)^2-c^2=\left(4\sqrt{3}\right)^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2=16\cdot 3-9\cdot 2=48-18=30$.

4. Se dau numerele: $a=\sqrt{5^2-5}-\sqrt{18}$ și $b=\sqrt{\left(9\cdot 4^{n+1}\right):2^{2n+1}}+2\sqrt{5}$

a) Să se scrie sub formă simplă a și b.

b) Să se calculeze media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b.

Soluție

a) $a=\sqrt{25-5}-\sqrt{18}=\sqrt{20}-\sqrt{18}=2\sqrt{5}-3\sqrt{2}$.

$b=\sqrt{\left(9\cdot 4^{n+1}\right):2^{2n+1}}+2\sqrt{5}=\sqrt{3^2\cdot 2^{2n+2}:2^{2n+1}}+2\sqrt{5}=\sqrt{3^2\cdot 2^{2n+2-2n-1}}+2\sqrt{5}=$

$=\sqrt{3^2\cdot 2}+2\sqrt{5}=3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$.

b) $m_{arit}=\frac{a+b}{2}=\frac{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{2}=2\sqrt{5}$.

$m_{geom}=\sqrt{ab}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{20-18}=\sqrt{2}$.

5. Fie a și b numere reale pozitive. Să se arate că $\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Soluție

Folosim proprietatea că dacă $x,y\in(0,\infty)$ și $x\leq y$ atunci $x^2\leq y^2$. Așadar, ridicăm la pătrat ambii membrii și obținem $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leq\frac{a^2+b^2}{2}\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2+2ab}{4}\leq\frac{a^2+b^2}{2}$.

Înmulțim inegalitatea cu 4 și obținem: $a^2+b^2+2ab\leq 2a^2+2b^2$. Trecem toți termenii în membrul întâi și obținem succesiv:

26. Se notează $A_k = \left\{ \overline{a_1 a_2 ... a_{10}} \middle| a_i \le 1, i \in \{1,2,..,10\} \text{ si } \sum_{s=1}^{10} a_s = k \right\}$. Să se determine numărul de elemente ale mulțimii A_k în cazurile:

a) $k=1$; b) $k=2$; c) $k=3$.

27. Se consideră mulțimile $A;B;C$ astfel încât $|A|=|B|=|C|=3$ și $A \cap B \cap C = \varnothing$. Să se arate că $5 \le |A \cup B \cup C| \le 9$.

28. Fie A, B mulțimi nevide. Să se determine $|A|$ știind că $|A \cup B| = 195$, $|B| = 85$ și $|B \setminus A| = 55$.

TESTE DE EVALUARE

TESTUL 1

1. Dacă $\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2} = a + b\sqrt{3}$, $a,b \in \mathbb{Q}$, calculați a și b.

2. Să se scrie sub formă mai simplă numărul real $a = 2\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\right)$ și să se determine opusul său.

3. Să se expliciteze expresia $|3x-9|$ și să se rezolve ecuația $|3x-9|=15$.

4. Să se scrie aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-2} ale numărului 2,01581.

5. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât să existe intervalul $I = \left[\frac{5x-1}{3}, 3x+1\right]$.

TESTUL 2

1. Se consideră numărul $\frac{1}{7} = x_0, x_1 x_2 x_3 \ldots$. Să se calculeze $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2017}$.

2. Fie $a \in \mathbb{R}$ și $b = |4a-13| + |3a-15|$. Să se calculeze valoarea lui b, pentru $a = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-2}$.

3. Se consideră numărul $a = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$. Să se arate că $a \in \mathbb{N}$.

4. Se consideră mulțimile: $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| -5 \le \frac{2x+1}{3} < 7 \right\}$ și $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| |3x-7| < 1 \right\}$.

a) Să se scrie A și B sub formă de intervale.

b) Să se determine $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $C_{\mathbb{R}} B$.

5. Să se determine $\left[\sqrt{3020}\right] + 3 \cdot \left\{-\frac{1}{3}\right\} + \left[\frac{\sqrt{8}}{5}\right]$.

TESTUL 3

1. Comparați numerele $a = \sqrt{2}$ și $b = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. *(Bacalaureat 2009)*

2. Să se demonstreze că numărul $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(1-\sqrt{2}\right)^2$ este număr natural. *(Bacalaureat 2009)*

3. Să se determine elementele mulțimii $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \middle| |2x+3| \le 7 \right\}$.

Capitolul

II FUNCȚII

1 ȘIRURI DE NUMERE REALE. ȘIRURI MĂRGINITE, ȘIRURI MONOTONE

Breviar teoretic

- Un **șir de numere reale** este o succesiune de numere reale $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ realizată după o anumită regulă, fiecare număr ocupând un loc bine determinat.
  Se notează $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sau (a_n).
- **Termenii șirului** sunt numerele $a_1, a_2, a_3, ...$.
- Indicele fiecărui termen se numește **rangul** acelui termen.
- Termenul a_n se numește **termenul general** al șirului.
- Șirul este diferit de mulțime.
- *Moduri de definire* a unui șir:

a) **Șiruri definite descriptiv**: se dă primul termen și câțiva termeni care-l succed astfel încât să se poată desprinde o regulă de determinare a succesorului oricărui termen.

b) **Șiruri definite cu ajutorul unei formule**
Formula $a_n = f(n),\ n \in \mathbb{N}^*$ se numește formula termenului general. Particularizând pe $n \in \mathbb{N}^*$, se obține orice termen al șirului.

c) **Șiruri definite printr-o relație de recurență**
O relație de recurență este o formulă cu ajutorul căreia se determină orice termen al șirului în funcție de termenii precedenți.

- Șirul (a_n) este **șir mărginit** dacă există un interval mărginit $[a, b]$ care conține toți termenii șirului: $a \le a_n \le b,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Șirul (a_n) este **mărginit** dacă $\exists M > 0$, astfel încât $|a_n| \le M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Șirul (a_n) este șir **monoton crescător** dacă $a_n \le a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. (1)
- Șirul (a_n) este **șir monoton descrescător** dacă $a_n \ge a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. (2)

Șirul (a_n) se numește **monoton** dacă este monoton crescător sau monoton descrescător.
Dacă inegalitățile (1) și (2) sunt stricte, atunci șirul este **strict crescător**, respectiv **strict descrescător**.

Exerciții și probleme rezolvate

1. Se consideră șirul definit descriptiv astfel: $\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, ...$

a) Să se scrie termenii șirului de rang 4,5 și 6.

b) Să se determine formula termenului general a_n al şirului.

Soluţie

a) Se observă că numitorii celor trei termeni consecutivi ai şirului sunt produse de numere naturale consecutive, primul factor fiind chiar rangul termenului.

Astfel, $a_4 = \frac{1}{4\cdot 5}$, $a_5 = \frac{1}{5\cdot 6}$, $a_6 = \frac{1}{6\cdot 7}$.

b) Conform regulei de succesiune observate la a) avem că $a_n = \frac{1}{n\cdot(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră şirul (a_n) cu termenul general $a_n = 3n^2 - n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine termenii de rang 2,3,8 şi $n+1$.

b) Să se calculeze suma $a_3 + 4a_5 - a_{10}$.

Soluţie

a) Pentru $n=2$ se obţine $a_2 = 3\cdot 2^2 - 2 = 10$. Pentru $n=3$, se obţine $a_3 = 3\cdot 3^2 - 3 = 24$, iar pentru $n=8$ se obţine $a_8 = 3\cdot 8^2 - 8 = 184$. Termenul de rangul $n+1$ se obţine înlocuind pe n cu $n+1$ în formula termenului general. Rezultă că $a_{n+1} = 3(n+1)^2 - (n+1) = 3n^2 + 5n + 2$.

b) Avem $a_3 = 24$, $a_5 = 3\cdot 5^2 - 5 = 70$, $a_{10} = 3\cdot 10^2 - 10 = 290$. Se obţine suma $24 + 4\cdot 70 - 290 = 14$.

3. Se consideră şirul (a_n) cu formula termenului general $a_n = 2n^2 - n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine termenii a_1, a_2, a_{10}.

b) Să se verifice dacă numerele 120 şi 324 sunt termeni ai şirului (a_n).

Soluţie

a) Pentru $n=1$ se obţine $a_1 = 1$, pentru $n=2$ se obţine $a_2 = 2\cdot 2^2 - 2 = 6$, pentru $n=10$ se obţine $a_{10} = 2\cdot 10^2 - 10 = 190$.

b) Presupunem că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_n = 120$, adică $2n^2 - n = 120$. Se obţine ecuaţia $2n^2 - n - 120 = 0$ cu $\Delta = 961 = 31^2$ şi soluţiile $n_1 = 8 \in \mathbb{N}$ şi $n_2 = -\frac{15}{2} \notin \mathbb{N}$. În concluzie 120 este termenul de rang 8.

Analog se procedează pentru 324 şi se obţine ecuaţia $2n^2 - n - 324 = 0$ cu $\Delta = 2593$ care nu este pătrat perfect .

Rezultă că ecuaţia nu are soluţii numere naturale iar 324 nu este termen al şirului.

4. Se consideră şirul (a_n) definit prin relaţia de recurenţă: $a_{n+1} = 3a_n - 2$, $n \geq 1$ şi $a_1 = -1$. Să se determine termenii a_2, a_3, a_4.

Soluţie

Dăm lui n valorile 1,2 respectiv 3 şi obţinem termenii ceruţi.

Pentru $n=1$, rezultă $a_2 = 3\cdot a_1 - 2 = 3\cdot(-1) - 2 = -5$.

Pentru $n=2$, rezultă $a_3 = 3\cdot a_2 - 2 = 3\cdot(-5) - 2 = -17$.

Pentru $n=3$, rezultă $a_4 = 3\cdot a_3 - 2 = 3\cdot(-17) - 2 = -53$.

5. Se consideră şirul (a_n) definit prin relaţia de recurenţă $a_{n+1} = a_n + 5$, $n \geq 1$ şi $a_1 = 3$.

a) Să se determine $5a_2 - 2a_3$.

Exerciții și probleme propuse

1. Să se determine termenii $a_2, a_8, a_{10}, a_{n+1}$ ai șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, cu termenul general:

a) $a_n = 5n-1$; b) $a_n = -3n$;

c) $a_n = 7-n^2$; d) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$;

e) $a_n = n+\left[\sqrt{n}\right]$; f) $a_n = (-1)^n + \left\{\dfrac{n}{3}\right\}$.

2. Să se găsească formula termenului general $a_n, n\geq 1$ pentru următoarele șiruri definite descriptiv:

a) $1,-1,1,-1,1,-1,...$ b) $\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{7},\dfrac{1}{9},...$.

c) $\dfrac{1}{1\cdot 2},\dfrac{1}{2\cdot 3},\dfrac{1}{3\cdot 4},\dfrac{1}{4\cdot 5},...$ d) $1,0,1,0,1,0,1,...$

e) $-1,2,-3,4,-5,6,-7,...$ f) $2,5,10,17,26,37,...$

3. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$. Determinați dacă numerele date sunt termeni ai șirului și în caz afirmativ, determinați rangul termenului respectiv, știind că:

a) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n}$; $x = 10,1$; b) $a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{2n+(-1)^n}$; $x = \dfrac{9}{19}$;

c) $a_n = \dfrac{(n-1)(n+4)}{n^2}$; $x = \dfrac{3}{2}$; d) $a_n = n+(-1)^n$; $x = 100$;

e) $a_n = n+\left[\sqrt{n}\right]$; $x = 18$; f) $a_n = 1+\left\{\dfrac{n}{2}\right\}$; $x = \dfrac{3}{2}$.

4. Să se determine termenul general al șirului $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin relația de recurență:

a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + n,\ n\geq 1$; b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n - n,\ n\geq 1$;

c) $a_1 = \dfrac{1}{2},\ a_{n+1} = 2a_n,\ n\geq 1$; d) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1},\ n\geq 1$;

e) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^{\ 2},\ n\geq 1$; f) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n,\ n\geq 1$.

5. Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este un șir mărginit, știind că:

a) $a_n = \dfrac{2n+5}{3n+1}$; b) $a_n = \dfrac{n^2+14}{2n^2+11}$; c) $a_n = \dfrac{2n}{n^2+4}$;

d) $a_n = 1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; e) $a_n = \dfrac{n+2(-1)^n}{n+1}$; f) $a_n = \dfrac{n+\sqrt{n}}{2n+3}$;

g) $a_n = \dfrac{2^n}{1+3^n}$; h) $a_n = \dfrac{2^n+3^n}{1+3^{n+1}}$; i) $a_n = \dfrac{(n+1)^3}{n^4+8}$.

6. Să se studieze mărginirea șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, cu termenul general:

a) $a_n = \dfrac{1+5+9+...+(4n-3)}{2n^2+1}$; b) $a_n = \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$;

Capitolul

IV APLICAȚII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIA PLANĂ

1 *PRODUSUL SCALAR A DOI VECTORI*

Breviar teoretic

- Fie vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ dați prin reprezentanții lor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$. Unghiul vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$ este dat de unghiul $\widehat{MON}$, unde semidreptele $(OM$ și $(ON$ au aceeași disecție cu semidreptele $[AB$, respectiv $[CD$. (fig. 1)

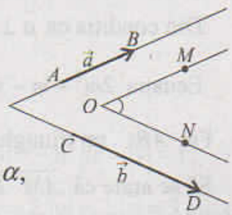


Figura 1

- **Produsul scalar** al vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$ este numărul $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$, unde α este măsura unghiului vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$.
- $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.
- Fie reperul cartezian $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ și vectorii $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$. Avem $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = 1$; $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = 0$.

  $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ (expresia analitică a produsului scalar)

  $$\cos\alpha = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

- Dacă $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2) \Rightarrow AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
- Doi vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$ sunt perpendiculari dacă și numai dacă $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Exerciții și probleme rezolvate

1. Se consideră punctele $A(-4,3)$; $B(2,5)$ și $C(6,-2)$.

Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\right)$.

Soluție

Determinăm coordonatele vectorilor din enunț. Avem: $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A,\ y_B - y_A)$. Se obține $\overrightarrow{AB}(6, 2)$. Analog se obțin vectorii $\overrightarrow{AC}(10,-5)$, $\overrightarrow{BC}(4,-7)$, $\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\right)(14,-12)$.

Rezultă că $\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\right) = 6.14 + 2\cdot(-12) = 60$.

2. Se consideră vectorii $\vec{a} = 2\sqrt{3}\cdot\vec{i} + 2\cdot\vec{j}$; $\vec{b} = \dfrac{1}{2}\cdot\vec{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\vec{j}$.

a) Să se calculeze $\vec{a}\cdot\vec{b}$ și $\vec{b}\cdot\vec{a}$.

b) Să se determine cosinusul unghiului vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Soluție

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$. $\vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}$. b) $\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. Avem

$|\vec{a}|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=4$ și $|\vec{b}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$. Rezultă $\cos\alpha=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{4\cdot 1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că vectorii $\vec{a}=\left(2m^2+1\right)\vec{i}+\vec{j}$ și $\vec{b}=\vec{i}-(m+4)\vec{j}$ sunt vectori perpendiculari.

Soluție

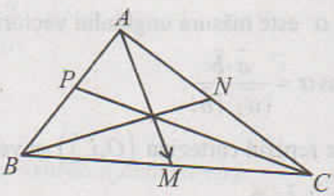
Din condiția ca $\vec{a}\perp\vec{b}$ rezultă relația $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Dar $\vec{a}\cdot\vec{b}=2m^2+1-(m+4)=2m^2-m-3$.

Ecuația $2m^2-m-3=0$, conduce la soluțiile $m_1=\frac{3}{2}$, $m_2=-1$.

4. Fie ABC un triunghi și M, N, P mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$, respectiv $[AB]$.

Să se arate că $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

Soluție



Exprimăm vectorii mediani:

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$; $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$ și

$\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right)$. Înlocuid în relația din enunț

obținem: $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{CA}+$

$+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}\right)=\frac{1}{2}\cdot 0=0$. Egalitatea este demonstrată.

5. Să se calculeze $\vec{a}^2-\vec{b}^2$ știind că $\vec{a}+\vec{b}=4\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{a}-\vec{b}=9\vec{i}+5\vec{j}$.

Soluție

Avem: $\vec{a}^2-\vec{b}^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\left(4\vec{i}-3\vec{j}\right)\left(9\vec{i}+5\vec{j}\right)=4\cdot 9-3\cdot 5=21$.

6. Fie vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$. Dacă $|\vec{u}|=1$, $|\vec{v}|=2$ și măsura unghiului vectorilor $\vec{u}$ și $\vec{v}$ este $\frac{\pi}{3}$, să se calculeze $\left(2\vec{u}+\vec{v}\right)\left(2\vec{v}-\vec{u}\right)$. *(Bacalaureat 2009)*

Soluție

Avem $\left(2\vec{u}+\vec{v}\right)\left(2\vec{v}-\vec{u}\right)=3\vec{u}\cdot\vec{v}+2\vec{v}^2-2\vec{u}^2$. (1)

Dar $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\frac{\pi}{3}=1$, $\vec{u}^2=1$, $\vec{v}^2=4$. (2)

Din relațiile (1) și (2) se obține $\left(2\vec{u}+\vec{v}\right)\left(2\vec{v}-u\right)=9$.

Exerciţii şi probleme propuse

1. Calculaţi $\vec{u}\cdot\vec{v}$ în cazurile:

a) $|\vec{u}|=2,\ |\vec{v}|=\frac{1}{3};\ \varphi=150^\circ$; b) $|\vec{u}|=4,\ |\vec{v}|=5,\ \varphi=120^\circ$; c) $|\vec{u}|=4,\ |\vec{v}|=5,\ \varphi=45^\circ$;

d) $|\vec{u}|=5,\ |\vec{v}|=2,\ \varphi=135^\circ$; e) $|\vec{u}|=4,\ |\vec{v}|=5,\ \varphi=75^\circ$; f) $|\vec{u}|=1,\ |\vec{v}|=\frac{2}{3},\ \varphi=15^\circ$.

2. Calculaţi $\vec{a}\vec{b},\vec{a}^2,\vec{b}^2,(\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b}),(\vec{a}-\vec{b})^2,(7\vec{a}+\vec{b})^2$ şi $|4\vec{a}-3\vec{b}|$ în cazurile:

a) $|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=4\varphi=60^\circ$; b) $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=\frac{1}{2},\varphi=45^\circ$; c) $|\vec{a}|=4,|\vec{b}|=6,\varphi=135^\circ$;

d) $|\vec{a}|=8,|\vec{b}|=\frac{1}{8},\varphi=30^\circ$; e) $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=1,\varphi=90^\circ$.

3. Calculaţi $\cos\varphi$ în cazurile:

a) $\vec{a}\vec{b}=18,|\vec{a}|=|\vec{b}|=6$; b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$; c) $\vec{u}\cdot\vec{v}=-1,\ |\vec{u}|=|\vec{v}|=1$;

d) $\vec{a}\cdot\vec{b}=6,|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=3$; e) $\vec{u}\vec{v}=-3,|\vec{u}|=4;|\vec{v}|=1$; f) $\vec{u}\vec{v}=2,|\vec{u}|=2,|\vec{v}|=3$.

4. Dacă $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=1,\ |\vec{c}|=4$ şi $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, calculaţi $\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$.

5. Se dau vectorii :

a) $\vec{u}=3\vec{i}-a\vec{j};\vec{v}=(5-a)\vec{i}-6\vec{j}$;

b) $\vec{u}=(a+2)\vec{i}+2\vec{j};\vec{v}=(a-3)\vec{i}-3\vec{j}$. Aflaţi $a\in\mathbb{R}$ ştiind că unghiul vectorilor $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ este obtuz.

6. Se consideră vectorii $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}$ şi $\vec{b}=-4\vec{i}-3\vec{j}$, unde $\vec{i},\vec{j}$ sunt versorii axelor. Calculaţi:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; b) $\vec{a}^2$; c) $\vec{b}^2$; d) $|\vec{a}|$; e) $|\vec{b}|$; f) $\cos\varphi$;

g) $(3\vec{a}-2\vec{b})(4\vec{a}+\vec{b})$; h) $(\vec{a}\cdot\vec{a})\cdot\vec{a}$; i) $\left(\vec{a}^2\right)^2$.

7. Se consideră $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}$. Calculaţi:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; b) $(3\vec{a}+5\vec{b})(4\vec{a}-2\vec{b})$; c) $(\vec{a}+2\vec{b})^2$; d) $|5\vec{a}+2\vec{b}|$.

8. Calculaţi lungimea vectorilor: $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j};\vec{b}=-5\vec{i}+3\vec{j};\vec{c}=-4\vec{i};\vec{d}=6\vec{j},\vec{e}=\vec{a}+\vec{b};\vec{f}=2\vec{a}-3\vec{b}$.

9. Calculaţi cosinusul unghiului dintre vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ în cazurile:

a) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\vec{b}=-\vec{i}+3\vec{j}$; b) $\vec{a}=-2\vec{i}-4\vec{j}$ şi $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$; c) $\vec{a}=3\vec{i}$ şi $\vec{b}=10\vec{j}$;

d) $\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}$ şi $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}$.

10. Se dau vectorii $\vec{a}=5\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\vec{b}=7\vec{i}-3\vec{j}$. Determinaţi vectorul $\vec{c}=x\vec{i}+y\vec{j}$ astfel încât $\vec{a}\cdot\vec{c}=38$ şi $\vec{b}\cdot\vec{c}=30$.

11. Se dau vectorii $\vec{a}=\alpha\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\vec{b}=-2\vec{i}+(5-\alpha)\vec{j}$. Determinaţi $\alpha\in\mathbb{R}$ pentru care $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt perpendiculari.

12. Calculaţi produsul scalar al vectorilor:

a) $\vec{a}=5\vec{i}+\vec{j},\vec{b}=\vec{i}-5\vec{j}$; b) $\vec{a}=3\vec{i}+3\vec{j},\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}$;

c) $\vec{a}=-2\vec{i}-\vec{j},\vec{b}=2\vec{j}$; d) $\vec{a}=-4\vec{j},\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$.