Prof. univ. dr. **Radu Şerban**
(coordonator)

Lect. univ. dr. **Daniela Ijacu**
Lect. univ. dr. **Iulian Mircea**

ALGEBRĂ ŞI ANALIZĂ MATEMATICĂ

TEORIE ŞI APLICAŢII

CORINT EDUCAŢIONAL

Date despre autori:

Radu Şerban – prof. univ. dr. în Departamentul de Matematici Aplicate al Academiei de Studii Economice din Bucureşti, distins cu titlul de profesor-emerit, autor sau coautor a 27 de cărţi de specialitate, monografii, cursuri universitare şi culegeri de probleme.

Daniela Ijacu – lector univ. dr. în Departamentul de Matematici Aplicate al Academiei de Studii Economice din Bucureşti, coautor al lucrărilor de specialitate: *Probabilităţi şi statistică matematică, Analysis and optimization of differential systems* (Editura Kluwer Academic, 2003).

Iulian Mircea – lector univ. dr. în Departamentul de Matematici Aplicate al Academiei de Studii Economice din Bucureşti, autor a două cărţi de specialitate: *Modele matematice în asigurări, Matematici financiare şi actuariale;* coautor la patru monografii şi cursuri universitare.

Referenţi ştiinţifici:
Prof. univ. dr. **Vasile Preda,** Universitatea Bucureşti, Facultatea de Matematică
Prof. univ. dr. **Maria Tudor,** Academia de Studii Economice din Bucureşti, Departamentul de Matematici Aplicate

Redactare: Alice-Raluca Petrescu
Tehnoredactare computerizată: Alice-Raluca Petrescu
Designul copertei: Dan Mihalache

ISBN 978-606-8723-32-7

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
ŞERBAN, RADU
Algebră şi analiză matematică: teorie şi aplicaţii / Radu Şerban (coord.), Daniela Ijacu, Iulian Mircea. - Bucureşti: Corint Books, 2015
Bibliogr.
ISBN 978-606-8723-32-7

I. Ijacu, Daniela
II. Mircea, Iulian
512(075.35)(076)
517(075.35)(076)

Pentru comenzi şi informaţii, contactaţi:
GRUPUL EDITORIAL CORINT

Departamentul de Vânzări
Str. Mihai Eminescu nr. 54A, sector 1, Bucureşti, cod poştal 010517
Tel./Fax: 021.319.47.97; 021.319.48.20

Depozit
Calea Plevnei nr. 145, sector 6, Bucureşti, cod poştal 060012
Tel.: 021.310.15.30
E-mail: vanzari@edituracorint.ro
Magazin virtual: www.edituracorint.ro

ISBN: 978-606-8723-32-7
9 786068 723327

Cuprins

Cuvânt-înainte

Lucrarea de față tratează două domenii fundamentale ale matematicii: algebra liniară şi analiza matematică. Lucrarea are la bază cursurile şi seminariile de algebră şi analiză matematică ținute de autori la Facultatea de Cibernetică, Statistică şi Informatică Economică din Academia de Studii Economice (ASE) din Bucureşti, precum şi cursurile de Matematici aplicate în economie ținute de autori la alte facultăți din ASE.

Asistăm în ultimele decenii la o amplificare a aplicării matematicii în diverse domenii, printre care se numără şi cel al studiilor economice. În acest sens, sunt de notorietate modelele matematice în domeniul financiar, modele care utilizează rezultate profunde din teoria integralei stochastice sau a ecuațiilor diferențiale stochastice. Practic, aproape orice teorie economică solicită un suport matematic. O analiză a unui sistem, fenomen sau proces economic, cât de cât consistentă şi coerentă, face apel la matematică, cel puțin pentru aspectele cantitative şi pentru modelarea variabilelor şi a legăturilor dintre ele. De asemenea, imensul volum de date statistice şi informații privind domeniul economic necesită pentru prelucrarea şi utilizarea sa metode, procedee şi algoritmi matematici. Modelarea matematică a fenomenelor şi proceselor economice utilizează concepte şi instrumente matematice de bază, cum sunt: ecuațiile, vectorii, operatorii liniari şi neliniari, măsurile, mulțimile şi funcțiile măsurabile, diferențialele, topologiile, procesele stochastice, lanțurile Markov, martingalele, integralele stochastice, seriile cronologice etc. Unele dintre acestea sunt tratate pe larg în lucrarea de față.

Lucrarea este structurată în două părți: partea întâi, destinată algebrei, are patru capitole (trei de teorie şi unul de aplicații), iar partea a doua, destinată analizei matematice, are opt capitole (şapte de teorie şi unul de aplicații).

Partea I – Algebră liniară are capitolele destinate spațiilor vectoriale, operatorilor liniari şi spațiilor euclidiene. În capitolul 1, *Spații vectoriale*, prezentăm noțiunile de bază, teorema schimbului a lui Steinitz, lema substituției, suma subspațiilor liniare, teorema dimensiunii şi teorema de existență a suplimentului direct. În capitolul 2, *Operatori liniari*, printre altele, prezentăm teorema dimensiunii pentru operatori liniari, teorema Hamilton-Cayley, teorema de caracterizare a operatorilor diagonalizabili, forma canonică Jordan, algoritmul de jordanizare, proprietățile funcționalelor liniare, biliniare şi pătratice, teorema inerției etc. În capitolul 3, *Spații euclidiene*, prezentăm inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz, proprietățile normei şi ale distanței, algoritmul de ortogonalizare a bazelor, descompunerea în subspații ortogonale, proprietăți ale operatorului autoadjunct şi ale operatorului ortogonal etc.

Partea a II-a – Analiză matematică are capitolele destinate elementelor de topologie, seriilor numerice şi seriilor de funcții, diferențialelor şi extremelor funcțiilor reale de mai multe variabile reale, ecuațiilor diferențiale şi elementelor de teoria măsurii şi a integralei. În capitolul 4, *Funcții de mai multe variabile*, am prezentat câteva teoreme privind condițiile necesare şi suficiente pentru punctele de extrem locale şi globale, un model de stoc pentru un tip de produse, teorema funcțiilor implicite şi metoda multiplicatorilor lui Lagrange pentru extremele cu legături. În capitolul 5, *Ecuații diferențiale*, am prezentat teorema lui Peano de existență a soluției locale a problemei Cauchy, ecuația integrală asociată unei ecuații diferențiale, teorema lui Liouville privind wronskianul soluțiilor şi folosirea formei Jordan în rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți. În capitolul 7, *Integrale*, am prezentat integrala Lebesgue, integrala Riemann cu parametru, integralele euleriene: gama şi beta, şi integrala dublă pe un domeniu compact care are arie.

Ținând cont de importanța modelelor econometrice în studiile economice, am prezentat un material adecvat pentru spațiile metrice, pentru spațiile cu măsură, pentru funcțiile măsurabile şi pentru construcția unei măsuri (abordările Carathéodory, Jordan şi Lebesgue-Radon).

Având un scop predominant didactic, lucrarea prezintă modul în care se operează cu elementele teoretice expuse (fiecare parte are un capitol de probleme rezolvate), demonstrații elaborate integral, numeroase exemple şi aplicații. Noțiunile sunt prezentate într-o manieră graduală, uşor de înțeles de către cititor. Prin această organizare a materiei, am vizat atât studenții de la licență şi masterat, cât şi pe cei din şcolile doctorale.

Din analiza conținutului şi din cele câteva idei scoase din lucrare se vede utilitatea acestei lucrări şi importanța ei pentru studenții de la facultățile economice, dar şi pentru cercetătorii şi economiştii interesați de matematicile aplicate.

Autorii

partea I. ALGEBRĂ LINIARĂ

Capitolul 1. Spații vectoriale

1.1. Noțiuni de bază

În cele ce urmează, vom prezenta o nouă structură algebrică, structura de spațiu vectorial (sau spațiu liniar) utilizând structurile algebrice cunoscute: monoid, grup, inel, corp. Pentru început să reamintim noțiunea de corp:

1.1. *Definiție:* Fie mulțimea $\mathbf{K} \neq \Phi$ şi două operații definite pe $\mathbf{K}$ $"\oplus","\otimes": \mathbf{K} \times \mathbf{K} \to \mathbf{K}$. Tripletul $(\mathbf{K}, \oplus, \otimes)$ este **corp** dacă sunt verificate următoarele cinci proprietăți:

i) $(\mathbf{K}, \oplus)$ este grup abelian (în care notăm elementul neutru cu 0 şi opusul lui $x \in \mathbf{K}$ cu $-x \in \mathbf{K}$);

ii) $(\mathbf{K}, \otimes)$ este monoid (în care notăm elementul neutru cu 1);

iii) $0 \neq 1$;

iv) $"\otimes"$ este distributivă la stânga şi la dreapta față de $"\oplus"$;

v) $(\forall)\, x \in \mathbf{K}, x \neq 0, (\exists)\, x^{-1} \in \mathbf{K}$ astfel încât $x \otimes x^{-1} = x^{-1} \otimes x = 1$.

Cu ajutorul noțiunii de corp se defineşte noțiunea de **spațiu vectorial (spațiu liniar)**:

Fie V o mulțime nevidă $(\neq \Phi)$ şi $(\mathbf{K}, \oplus, \otimes)$ un corp comutativ. Elementele lui $\mathbf{K}$ se numesc **scalari**, elementele lui V se numesc **vectori**. Se definesc două operații:

a) operația internă numită **adunarea vectorilor**, notată prin „+“, unde: $+ : V \times V \to V, (x, y) \to x + y$;

b) operația externă numită **înmulțirea cu scalari a vectorilor**, notată prin „·“, unde: $\cdot : \mathbf{K} \times V \to V, (\alpha, x) \to \alpha \cdot x$.

Vom considera că $x \cdot \alpha = \alpha \cdot x$ pentru $\forall x \in V$ şi $\forall \alpha \in \mathbf{K}$.

1.2. ***Definiţie:*** Spunem că V este **spaţiu vectorial** (sau **spaţiu liniar**) peste corpul $\mathbf{K}$ (sau că perechea (V, $\mathbf{K}$) este spaţiu vectorial (liniar)), dacă:

i) (V, +) este grup abelian (în care elementul neutru este notat prin $\overline{0}$, mai simplu 0, şi se numeşte **vectorul nul**);

ii) $(\alpha \oplus \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}$, $\forall x \in V$;

iii) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$, $\forall \alpha \in \mathbf{K}$, $\forall x, y \in V$;

iv) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \otimes \beta) \cdot x$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}$, $\forall x \in V$;

v) $1 \cdot x = x$, $\forall x \in V$, unde 1 este elementul unitate al corpului (elementul neutru pentru operaţia $\otimes$).

Pentru simplificarea expunerii, notăm mai simplu şi operaţiile corpului, adică notăm corpul cu $(\mathbf{K}, +, \cdot)$. Pentru $\forall x \in V$ elementul $-x \in V$ se numeşte **vectorul opus** lui x.

Cazuri particulare:

1. Pentru $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, spaţiul vectorial $(V, \mathbf{R})$ se numeşte *spaţiu vectorial real.*

2. Pentru $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, spaţiul vectorial $(V, \mathbf{C})$ se numeşte *spaţiu vectorial complex.*

1.3. ***Exemple:***

1. $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ este spaţiu vectorial, numit *spaţiu vectorial numeric real*, unde:

$$\mathbf{R}^n \overset{\text{not}}{=} \underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times .. \times \mathbf{R}}_{n \text{ ori}} = \left\{ (x_1, x_2, .., x_n)^T \,\middle|\, x_i \in \mathbf{R},\ i = \overline{1,n} \right\},$$

iar $(x_1, x_2, .., x_n)^T$ este vector coloană;

operaţia internă se defineşte astfel:

$$\forall x = (x_1, x_2, .., x_n)^T,\ \forall y = (y_1, y_2, .., y_n)^T \in \mathbf{R}^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, .., x_n + y_n)^T;$$

operaţia externă se defineşte astfel:

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall x = (x_1, x_2, .., x_n)^T \in \mathbf{R}^n \Rightarrow \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, .., \alpha x_n)^T.$$

Vectorul nul din $\mathbf{R}^n$ se notează prin 0_n (sau mai simplu cu 0).

Generalizare: ($\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}$) este spaţiu vectorial, unde:

$$\mathbf{K}^n \overset{\text{not}}{=} \underbrace{\mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \cdots \times \mathbf{K}}_{n \text{ ori}} = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \,\middle|\, x_i \in \mathbf{K}, i = \overline{1,n} \right\}.$$

Caz particular: $\mathbf{K}=\mathbf{R}\Rightarrow(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$ spațiu numeric real

$\mathbf{K}=\mathbf{C}\Rightarrow(\mathbf{C}^n,\mathbf{C})$ spațiu numeric complex.

2. ($M_{m,n}$ (**K**), **K**) este spațiul vectorial al matricelor de tipul *(m, n)* cu elemente din **K**, unde $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ sau $\mathbf{K}=\mathbf{C}$, operația internă este adunarea matricelor şi operația externă este înmulțirea cu numere a matricelor; aici $\bar{0}=0_{m,n}$.

3. $(F[a,b],\mathbf{R})$ este spațiul vectorial al funcțiilor reale definite pe intervalul $[a,b]$, unde: $F[a,b]=\{f:[a,b]\to\mathbf{R}\}$, operația internă este adunarea funcțiilor, iar operația externă este înmulțirea cu numere a funcțiilor; aici $\bar{0}$ este funcția nulă pe $[a,b]$.

4. $(\mathbf{R}_n[X],\mathbf{R})$ este spațiul vectorial al polinoamelor, unde $\mathbf{R}_n[X]$ este mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali, de grad cel mult *n*, în nedeterminata *X*, operația internă este adunarea polinoamelor, iar operația externă este înmulțirea cu numere reale a polinoamelor; aici $\bar{0}$ este polinomul nul.

5. $(\{\bar{0}\},\mathbf{K})$ este spațiul vectorial nul, unde: operația internă: $\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}$; operația externă: $\forall\alpha\in\mathbf{K}\Rightarrow\alpha\cdot\bar{0}=\bar{0}$.

Regulile de calcul sunt prezentate în următoarea propoziție.

1.4. Propoziție: Fie spațiul vectorial $(V,\mathbf{K})$. Atunci:

i) $\forall x\in V\Rightarrow 0\cdot x=\bar{0}$;

ii) $\forall\alpha\in\mathbf{K}\Rightarrow\alpha\cdot\bar{0}=\bar{0}$;

iii) $\forall x\in V\Rightarrow(-1)\cdot x=-x$;

iv) Dacă $\alpha\neq 0$ şi $\alpha\cdot x=\bar{0}\Rightarrow x=\bar{0}$.

► *Demonstrație:*

i) $0\cdot x=(0+0)\cdot x=0\cdot x+0\cdot x \overset{\text{unicitate elem. neutru } \bar{0}}{\Rightarrow} 0\cdot x=\bar{0}$;

ii) $\alpha\cdot\bar{0}=\alpha\cdot(\bar{0}+\bar{0})=\alpha\cdot\bar{0}+\alpha\cdot\bar{0} \overset{\text{unicitatea lui } \bar{0}}{\Rightarrow} \alpha\cdot\bar{0}=\bar{0}$;

iii) Din (i) avem:

$0\cdot x=\bar{0} \Leftrightarrow (1+(-1))\cdot x=\bar{0} \Leftrightarrow x+(-1)\cdot x=\bar{0} \overset{\text{unicitatea lui } -x}{\Rightarrow} (-1)\cdot x=-x$;

iv). Avem $x=1\cdot x=(\alpha^{-1}\cdot\alpha)\cdot x=\alpha^{-1}\cdot(\alpha\cdot x)=\alpha^{-1}\cdot\bar{0}=\bar{0}$. ◄

1.5. ***Definiţie:*** Fie spaţiul vectorial $(V,\mathbf{K})$ şi X o submulţime nevidă a lui V. X se numeşte **subspaţiu vectorial** al lui V dacă:
i) este închisă la adunarea vectorilor, adică $\forall x,y\in X \Rightarrow x+y\in X$;
ii) $\forall \alpha\in\mathbf{K}, \forall x\in X \Rightarrow \alpha\cdot x\in X$.

1.6. ***Observaţie:*** $(X,\mathbf{K})$ este spaţiu vectorial.

1.7. ***Exemple de subspaţii vectoriale:***

1. Spaţiul vectorial nul este subspaţiu vectorial al oricărui spaţiu vectorial.

2. Fie $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ şi $X=\left\{ (x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}} \;\middle|\; x_i\in\mathbf{R}, i=\overline{1,n}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$. Atunci X este subspaţiu vectorial al lui $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$.

1.8. ***Propoziţie:*** Intersecţia a două subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial $(V,\mathbf{K})$ este tot un subspaţiu vectorial.

► *Demonstraţie*:

Fie X şi Y subspaţii vectoriale ale lui V. Fie $x,y\in X\cap Y$ vectori oarecare. Din $x,y\in X$ şi X subspaţiu vectorial, rezultă $x+y\in X$. Analog avem $x+y\in Y$. Prin urmare $(x+y)\in X\cap Y$, $\forall x,y\in X\cap Y$. Fie $\alpha\in\mathbf{K}$ şi $x\in X\cap Y$. Din $x\in X$ şi X subspaţiu vectorial rezultă $\alpha\cdot x\in X$. Analog avem $\alpha\cdot x\in Y$, prin urmare $\alpha\cdot x\in X\cap Y$ pentru orice $\alpha\in\mathbf{K}$ şi orice $x\in X\cap Y$. Aşadar, $(X\cap Y,\mathbf{K})$ este subspaţiu vectorial al lui $(V,\mathbf{K})$. ◄

1.9. ***Observaţie****:* În general, reuniunea a două subspaţii vectoriale nu este subspaţiu vectorial.

1.10. ***Definiţie:*** Fie $(V,\mathbf{K})$ un spaţiu vectorial. Se numeşte **combinaţia liniară** a vectorilor $x_1,x_2,\ldots,x_n\in V$ cu scalarii $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbf{K}$ vectorul: $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n \overset{\text{notat}}{=} \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$

1.11. ***Definiţie:*** Un sistem finit de vectori din V se numeşte **liniar independent** dacă: $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=\overline{0}\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$.

1.12. ***Observaţie:*** Orice vector nenul formează un sistem liniar independent.