SUPERMATE

Editor: Călin Vlasie
Corectură: Anca Pascu
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Design copertă: Ionuț Broştianu

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
SITARU, DANIEL
Matematică : probleme de concurs : clasele 5-8 / Daniel Sitaru. –
Piteşti : Cartea Românească Educațional, 2018
ISBN 978-606-94580-3-7
51

DANIEL SITARU

MATEMATICĂ

PROBLEME DE CONCURS

CLASELE 5-8

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

Cuprins

MOTTO:
Crede în tine!

Enunţuri

1. Fie numărul natural $\overline{abcdab}$. Să se arate că dacă $7\overline{ab} = \overline{cd}$, atunci N se divide cu 1189 .

2. Suma a trei numere naturale consecutive este un număr de forma $\overline{a0bc}$, unde $b = c^2; a = c^3$. Aflaţi numerele.

3. Să se afle $n \in \mathbb{N}^*$, pentru care numărul $A = 3n^4 + 6n^3 - 3n - 6$ este divizibil cu 7.

4. Să se determine $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + ... + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = m^{2014}.$$

5. Determinaţi numerele naturale care prin tăierea ultimei cifre se micşorează de exact 11 ori.

6. Fie $n = 2015 \cdot 2016 \cdot ... \cdot 4028$. Să se arate că n este divizibil cu 2^{2014}, dar nu este divizibil cu 2^{2015}.

7. Să se scrie numărul 7^{2015} ca sumă a şapte numere naturale consecutive.

8. Numerele 1, 2, 3, …, 64 se dispun pe o tablă de şah în aşa fel încât pe fiecare coloană suma numerelor să fie aceeaşi şi numărul 7 să fie pe un pătrat alb. Se cere suma numerelor de pe pătratele negre.

9. Arătaţi că există un multiplu al lui 2015 care să nu aibă nicio cifră nenulă.

10. Să se scrie în ordine descrescătoare şi să se determine termenii din mijloc ai şirului de fracţii:

$$\frac{9}{14}; \frac{10}{21}; \frac{11}{28}; ...; \frac{295}{2016}.$$

11. Câte numere $N = \overline{aba7a}$ sunt divizibile cu 3? Dar cu 7? Dar cu 21?

12. Să se determine x, y, z încât:

$$\overline{xyz}+\overline{yzx}+\overline{zxy}=2997\ .$$

13. Să se arate că dacă dispunem de bonuri valorice de 4 şi 5 lei putem plăti orice sumă mai mare decât 12 lei cu acestea, fără a primi rest.

14. Să se arate că există $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât numărul scris cu n cifre de 1 să se dividă cu 2017.

15. Arătați că nu există pătrate perfecte de forma $\overline{aaabbb}$, cu $a \neq 0$.

16. Fie $M=\overline{abcde}; N=\overline{bcdea}; P=\overline{cdeab}$. Să se arate că dacă oricare dintre numerele M, N, P este divizibil cu 41, atunci $M + N + P$ este divizibil cu 41.

17. Să se arate că numărul $N=2^{16130}\cdot 3^{4028}+1$ este divizibil cu 17.

18. Să se determine toate numerele naturale de maximum şase cifre care au cifrele direct proporționale cu rangul lor de la dreapta spre stânga.

19. Să se demonstreze că numărul $1\underbrace{000...00}_{\text{de 2015 ori}}1$ nu este prim.

20. Fie x un număr natural şi $S(x)$ suma cifrelor sale.

a. Să se arate că $x - S(x)$ este divizibil cu 9.

b. Să se arate că dacă $S(x) = S(2x)$, atunci x este divizibil cu 9.

21. Fie $x,y\in\mathbb{Z}$ astfel încât: $11\,|\,x^{2048}+y^{2048}$. Se cere restul împărțirii lui $x + y$ la 11.

22. Să se determine $n \in \mathbb{N}$, ştiind că numărul divizorilor naturali ai lui $2^n\cdot 4851$ este 72.

23. Să se determine numerele $\overline{ab}$ pentru care:

$$\frac{\overline{aaa}\cdot\overline{bbb}}{111\cdot\overline{ab}}=\frac{\overline{abb}+\overline{baa}+1110}{\overline{aba}+\overline{bab}-980}\ .$$

24. Să se arate că oricare ar fi $a\in\mathbb{N}^*$ există $b,c,d,e,f\in\mathbb{N}$ încât:

$$1521^a+39^b=c^2+d^2+e^2+f^2\ .$$

25. Să se rezolve ecuația:

$$\overline{1ab}+\overline{ab1}+\overline{b1a}=\overline{1a}+\overline{ab}+\overline{b1}+x(a+b+1)\,.$$

26. Să se arate că numărul: $2016+2016^2+...+2016^{2015}$ este divizibil cu 2015.

27. Se cere câtul împărțirii sumei tuturor numerelor de forma $\overline{abba}$ la 11.

28. Să se compare numerele 63^{11} şi 17^{17}.

29. Fie $a,b,c,d,e\in\mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$(a+b)(a+c)(a+d)(a+e)=5005\,.$$

Arătați că a,b,c,d,e nu pot fi toate numere prime.

30. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{N}$ încât:

$$\overline{0,aa(b)}+\overline{0,bb(c)}+\overline{0,cc(a)}=0,(\text{[illegible]})\,.$$

31. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{N}$ încât:

$$\overline{0,a(bb)}+\overline{0,b(cc)}+\overline{0,c(aa)}=0,(6)\,.$$

32. Să se scrie numărul 5005 ca o sumă de numere al căror produs să fie 5005.

33. Fie p, q, r numere prime distincte mai mari decât 3. Se cere restul împărțirii sumei $p^2+q^2+r^2$ la 12.

34. Să se rezolve ecuația:

$$\overline{abc7}+\overline{bc7a}+\overline{c7ab}+\overline{7abc}=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}+x(a+b+c)\,.$$

35. Fie $A=2^{4n+1}\cdot5^{4n+3}-1; n\in\mathbb{N}^*$. Să se afle n astfel încât suma cifrelor numărului A să fie 20[illegible]1.

36. Arătați că un număr natural cu 2020 de cifre, din care jumătate sunt cifra 2 şi jumătate sunt cifra 4 nu poate fi pătrat perfect.

37. Să se determine cifrele a, b, c astfel încât:

$$\frac{\overline{abc}}{5}=\frac{\overline{bca}}{10}=\frac{\overline{cab}}{12}=111\,.$$

38. Fie $x \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$. Să se determine a, b, c astfel încât:

$$\overline{abc}_{(x)} + \overline{bca}_{(x)} + \overline{cab}_{(x)} = 27(x^2 + x + 1)\ .$$

39. Câte numere de forma $\overline{abab3c}$ sunt divizibile cu 4 şi au proprietatea că $\overline{ab}$ este pătrat perfect?

40. Aflaţi x, a, b, $c \in \mathbb{N}$ încât:

$$x \cdot \overline{abc} = \overline{1abc}\ .$$

41. Un triunghi are măsurile unghiurilor proporționale cu 10, 11, 12. Să se arate că triunghiul are un unghi de 60°.
Generalizare pentru măsurile unghiurilor numere naturale consecutive.

42. Să se determine toate numerele naturale $\overline{aaab}$ cu proprietatea:

$$\overline{aaab}^2 = \overline{cccddddb}\ .$$

43. Fie $x_1, x_2, ..., x_n; n \in \mathbb{N}^*$, încât:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 2014 \text{ şi } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} = 2014.$$

Să se determine n.

44. Să se arate că dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi atunci:

$$(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 \geq 3abc\ .$$

45. Fie $A_1, A_2, ..., A_{2015}$ puncte pe o dreaptă având proprietatea că distanța dintre oricare două este strict mai mică decât 1. Să se arate că suma tuturor distanțelor dintre oricare două puncte este strict mai mică decât 1007 · 1008.

46. Avem la dispoziție un raportor care are o singură gradație la 19°. Să se arate că utilizând acest raportor putem construi orice unghi având măsura 1°, 2°, 3°, …, 359°. De câte utilizări ale raportorului este nevoie pentru a desena un unghi de 60°?

47. Fie $(OA_3$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle A_1OA_2$ cu măsura de $128°32'16''$. $(OA_4$ este bisectoarea $\sphericalangle A_1OA_3$, $(OA_5$ este bisectoarea $\sphericalangle A_1OA_4 ... (OA_n$ este bisectoarea $\sphericalangle A_1OA_{n-1}$. Aflați cel mai mic n pentru care $m(\sphericalangle A_1OA_n) < 1''$.

48. Fie $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*; a^2+b^2=4, c^2+d^2=9; ac+bd=6$. Să se arate că:

$$\left|\frac{a}{c}\right| = \left|\frac{b}{d}\right| = \frac{2}{3}.$$

49. Determinați toate numerele de trei cifre cu proprietatea că modulul diferenței dintre număr şi inversatul său este număr par.

50. Să se arate că oricum am alege 2015 numere întregi există unele dintre acestea cu suma dintre ele divizibilă cu 2015.

51. Să se determine al 26-lea termen al şirului:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \ldots$$

52. Să se arate că diferența pătratelor a două numere prime mai mari decât 3 este divizibilă cu 12.

53. Să se arate că nu există $x, y, z \in \mathbb{N}$ încât:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 2020.$$

54. Să se determine măsurile unghiurilor interioare ale unui patrulater convex ştiind că măsurile unghiurilor sale exterioare sunt direct proporționale cu numerele 2, 3, 4, 6.

55. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Să se arate că dacă:

$$a-3b+2c \geq 0, b-3c+2d \geq 0, c-3d+2a \geq 0, d-3a+2b \geq 0,$$

atunci $a = b = c = d$.

56. Să se afle un număr natural n astfel încât restul împărțirii numărului $N = \overline{aaabbbccc7}$ la n şi restul împărțirii sumei cifrelor sale la n să coincidă.

57. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ şi $A = \dfrac{2a+3b+5c+7d}{17}; B = \dfrac{3a+5b+7c+2d}{17};$

$$C = \frac{5a+7b+2c+3d}{17}; \quad D = \frac{7a+2b+3c+5d}{17}.$$

Să se arate că dacă oricare trei dintre numerele A, B, C, D sunt întregi, atunci şi cel de-al patrulea număr este întreg.

58. Să se arate că:

$$x = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014}$$

nu este număr natural.

59. Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$. Dacă: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2013} = \frac{x}{y}$, arătați că $2015 \mid x - y$.

60. Fie $A = 2014^{4030} + 2016^{2015} + 1$ la 403. Să se determine restul împărțirii lui:

$$A = (a-1)^{2n} + (a+1)^n + 1 \text{ la } a.$$

Generalizare: Fie $a, b, n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine restul împărțirii lui:

$$A = (ab-1)^{2n} + (ab+1)^n + 1 \text{ la } b.$$

61. Să se arate că numărul: $A = 2^{2016} + 1$ nu poate fi scris ca sumă de două numere prime.

62. Să se determine cifrele x, y astfel încât:

$$\overline{0,(xx1yy)} + \overline{0,(xx2yy)} + ... + \overline{0,(xx9yy)} = 5.$$

63. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația:

$$x + 2015a - 671b = \sqrt{11 \cdot \overline{abba}}.$$

64. Să se demonstreze că fracția:

$$\frac{2015!+1}{2016!+1}$$

este ireductibilă. ($n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$; $n \in \mathbb{N}^*$)

65. Să se rezolve ecuația: $x(\overline{abcd} + \overline{cdab}) = \overline{ab} + \overline{cd}$, ştiind că: $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = 493$.

66. Să se arate că:

$$\frac{1}{1234} + \frac{1}{1234^2} + ... + \frac{1}{1234^{2016}} < 0,(001).$$

67. Demonstrați că nu există $x, y, z \in \mathbb{N}$; $x \neq y \neq z \neq x$ încât:

$$1024^x + 1024^y = 1024^z.$$

68. Numărul n împărțit la 7 dă restul 3 şi împărțit la 9 dă restul 5. Se cere restul împărțirii lui n la 63.

69. Fie BC = 10 m un segment pe care considerăm punctele $B_1, B_2, ..., B_n$; $n \in \mathbb{N}^*$ încât:

$$BB_1 = \frac{1}{2}BC; BB_2 = \frac{1}{2}BB_1; BB_3 = \frac{1}{2}BB_2; ...; BB_n = \frac{1}{2^{n-1}}BB_{n-1}.$$

Aflați un număr $n \in \mathbb{N}^*$ încât $BB_n < 1$ Å. (1 Angstrom $= 10^{-10}$ m)

70. Se consideră un triunghi oarecare având cea mai mare latură de 8 cm. Să se arate că oricum am alege 17 puncte în interiorul sau pe laturile triunghiului, există două dintre ele aflate la o distanță de cel mult 5 mm unul de altul.

71. Fie $x > 1$ şi $n \in \mathbb{N}^*$; $n > 2$. Să se arate că:

$$x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + ... + \frac{x^n}{n^2} > \frac{n+x}{n+1}.$$

72. Fie $N = (2015^2 - 2015)(2015^2 - 2015 + 2) + 1$. Să se arate că suma cifrelor lui N este divizibilă cu 9.

73. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a + b + c = 2016$, atunci:

$$\max(a,b,c) - \min(a,b,c) > 2015 - \sum \min(a,b).$$

74. Fie $A(x) = \max(x;x+1;2) - \min(x;x+1;2)$ şi

$B(x) = 3 - \min(x,2) - \min(x+1,2) - \min(x;x+1)$, unde $x \in \mathbb{R}$. Să se rezolve ecuația:

$$A(x) = B(x).$$

75. Fie A, B, C, D măsurile, în grade, ale unghiurilor unui patrulater convex. Să se arate că:

$$\frac{A^2+B^2+C^2}{360^\circ - D} + \frac{B^2+C^2+D^2}{360^\circ - A} + \frac{C^2+D^2+A^2}{360^\circ - B} + \frac{D^2+A^2+B^2}{360^\circ - C} \geq 360^\circ.$$

76. Fie AA' mediană în triunghiul ABC; $A' \in (BC)$. Fie $M \in (BA')$; $N \in (A'C)$. Paralela prin M la AA' intersectează AB şi AC în S, respectiv T. Paralela prin N la AA' intersectează AC şi AB în S', respectiv T'. Să se arate că:

$$MS + MT = NS' + NT'.$$

77. a. Să se determine $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$2014 = a^2 + b^2 - c^2; \quad 2015 = d^2 + d^2 - f^2.$$

b. Să se arate că dacă $n \in N, n \geq 7$ există $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ încât

$$n = a^2 + b^2 - c^2.$$

78. Să se afle $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$, încât:

$$a - b = b - c = d - e = e - a;\ abcde = 1.$$

79. Să se rezolve ecuația:

$$x^3 + 2013^3 + 2014^3 = 4054182x.$$

80. Fie $S_n = \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{1\cdot 2}}} + \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{2\cdot 3}}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}}};\ n \in \mathbb{N}^*$.

Să se calculeze: $1 + S_n$.

81. În triunghiul ABC, m($\sphericalangle A$) = 90°, m($\sphericalangle B$) = 15°, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, $DE \perp AB$, $E \in (AB)$, $EF \perp AD$, $F \in (AD)$, $EF = 4$ cm. Să se rezolve triunghiul ABC.

82. Să se arate că un patrulater inscriptibil având laturile $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$, $AD = 2x$, $x \in \mathbb{N}^*$ nu poate avea aria egală cu $\sqrt{2013}$ pentru nicio valoare naturală a lui x.

83. Să se găsească cel mai mare $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}} < 2013\sqrt{2}.$$

84. Să se arate că dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi şi

$$(a-b)^{2015}(a-c)^{2015} + (b-a)^{2015}(c-a)^{2015} + (c-a)^{2015}(c-b)^{2015} = 0,$$

atunci triunghiul este echilateral.

85. Fie $x_i \in R; i \in \overline{1,6}$; $\sum_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{6} x_i^2 = 1$. Să se arate că:

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{6} (x_i - x_j)^2 \geq 105 \cdot \min_{\substack{i,j=1\\ i>j}} (x_i - x_j)^2$$

86. Să se arate că dacă $\dfrac{7^n-7}{n}\in\mathbb{N};\ n\in\mathbb{N}^*$ atunci $\dfrac{7^{7^n}-7^7}{7^n-7}\in\mathbb{N}$.

87. Se dă un trapez de baze $AB = 17$ cm, $CD = 8$ cm şi $MN \parallel AB$, $M \in (AD)$, $N \in (BC)$, $\dfrac{BN}{CN}=3.$ Să se calculeze MN.

88. Să se determine x, $n \in \mathbb{N}^*$ încât:

$$\frac{x}{0,(x)}+\frac{x^2}{0,0(x)}+\frac{x^3}{0,00(x)}+\ldots+\frac{x^n}{0,\underbrace{000...0}_{\text{de } n-1 \text{ ori}}(x)}=3789.$$

89. Fie $a, b, c, d \in (0, \infty)$; $a + b + c + d = 2$. Să se arate că:

$$\sqrt{a(b+c+d)}+\sqrt{b(a+c+d)}+\sqrt{c(a+b+d)}+\sqrt{d(a+b+c)}\le 4.$$

90. Arătați că dacă media aritmetică a primelor n zecimale ale numărului $\sqrt{3}-1$ este cuprinsă între $4\dfrac{2}{5}$ şi $4\dfrac{3}{5}$, atunci şi media aritmetică a primelor n zecimale ale numărului $2-\sqrt{3}$ are aceeaşi proprietate.

91. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi

$$1-4a+3b\ge 0,\ a-4b+3c\ge 0,\ b-4c+3a\ge 0,\ c-4+3a\ge 0,$$

atunci $a = b = c = 1$.

92. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{x-2014}{2}+\frac{x-2010}{3}+\frac{x-2004}{4}+\ldots+\frac{x-1985}{11}=55.$$

93. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} x = yzt \\ y = xzt \\ z = xyt \\ t = xyz \end{cases}.$$

94. Fie $C = 9 \cdot \overline{\underbrace{111\cdots1}_{\text{de 2015 ori}}\underbrace{aaa\cdots a}_{\text{de 2015 ori}}\underbrace{bbb\cdots b}_{\text{de 2015 ori}}} + 8$. Să se afle a, $b \in \mathbb{N}$ încât C să fie un cub perfect.

95. Să se arate că dacă într-un triunghi ABC avem:

$$a + \alpha h_a = b + \alpha h_b = c + \alpha h_c; \quad \alpha \in (0, \infty),$$

atunci triunghiul este echilateral.

96. Fie $A = 1234567891011...20142015$. Să se arate că $\sqrt{A}$ este număr irațional.

97. Să se arate că dacă $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ şi $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, atunci $a = c$ şi $b = d$.

98. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, atunci:

$$(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1) \geq 27abc$$

99. Să se arate că dacă $a, b, c, d, x, y, z, t \in (0, \infty)$,

$$\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz} + \sqrt{dt} = \sqrt{(a + b + c + d)(x + y + z + t)},$$

atunci a, b, c, d sunt direct proporționale cu x, y, z, t.

100. Fie $a, b, c, d \in (0, \infty)$. Să se arate că:

$$\frac{a}{a + 2b} + \frac{b}{2a + b} + \frac{c}{c + 2d} + \frac{d}{2c + d} \geq \frac{4}{3}.$$

101. Fie $A = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{100}}$. Să se arate că $18 - A$ nu este număr natural.

102. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Să se arate că:

$$\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\left(1 - \frac{1}{b^2}\right)\left(1 - \frac{1}{c^2}\right) > \frac{1}{8}.$$

103. Să se arate că dacă $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$; $a + 2b + 3c + 4d + 5e \geq 55$, atunci:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq 55.$$

104. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a^2 + b^2 + c^2 = 2015$. Să se arate că:

$$\sqrt{2015 - a^2} + \sqrt{2015 - b^2} + \sqrt{2015 - c^2} \geq \sqrt{2}(a + b + c).$$

105. Fie $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2+c^2+d^2=2016$. Să se arate că:

$$\sqrt{2016-a^2}+\sqrt{2016-b^2}+\sqrt{2016-c^2}+\sqrt{2016-d^2}\geq\sqrt{3}(a+b+c+d).$$

106. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale pozitive, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $4^n\cdot x_1x_2\ldots x_n=1$. Să se arate că:

$$4^n(x_1^2+x_2)(x_2^2+x_3)\cdot\ldots\cdot(x_{n-1}^2+x_n)(x_n^2+x_1)\geq 1.$$

107. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere pozitive; $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$; $n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că pentru orice $p \in \mathbb{R}$ avem:

$$2(\sqrt{p^2x_1+1}+\sqrt{p^2x_2+1}+\ldots+\sqrt{p^2x_n+1})\leq p^2+2n.$$

108. Reprezentați grafic mulțimile:

$$A=\{(x,y)\,|\,x,y\in[-1,1];xx=y|y|\};$$
$$B=\{(x,y)\,|\,x,y\in[-1,1];xx=-y|y|\}.$$

109. Fie $a > 0$ şi $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că:

$$a^{2n}+a^{n+1}+1\geq a^n+a.$$

110. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}\in\mathbb{Z}$; $n\in\mathbb{N}^*$; $x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_{2n+1}=1$. Să se afle $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ astfel încât:

$$|x_1-x_2|=|x_2-x_3|=\ldots=|x_{2n}-x_{2n+1}|=|x_{2n+1}-x_1|.$$

111. Să se arate că:

$$\left(1+\frac{\pi}{e}\right)^9+\left(1+\frac{e}{\pi}\right)^9\geq 1024.$$

112. Fie $x, y \in \mathbb{Z}$; $x \leq 11$; $y \leq 100$. Să se arate că:

$$\left|x\sqrt{5}+y\sqrt{7}\right|>\frac{1}{333}.$$

113. Fie $x, y, z \in (0, \infty)$. Să se arate că:

$$\frac{x}{(1+x)^2}+\frac{y}{(1+x+y)^2}+\frac{z}{(1+x+y+z)^2}\leq\frac{x+y+z}{1+x+y+z}.$$

114. Să se arate că: $(\forall)x, y, z \in (0,\infty)$

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz(xy + yz + xz) \geq 8\left(\frac{y^2z^2\sqrt{x}}{(z+y)^2} + \frac{x^2y^2\sqrt{z}}{(x+y)^2} + \frac{z^2x^2\sqrt{y}}{(z+x)^2}\right).$$

115. Să se arate că: $(\forall)x, y, z \in (0,\infty)$

$$x^3 + y^3 + z^3 + x + y + z \geq 4\left(\frac{x^2y}{x+y} + \frac{y^2z}{y+z} + \frac{z^2x}{z+x}\right).$$

116. Fie M un punct în interiorul triunghiului ABC. Notăm $x = d(M, BC)$, $y = d(M, AC)$, $z = d(M, AB)$. Să se arate că:

1. $3S \leq p(x + y + z)$;
2. $\dfrac{(ax)^2}{by + cz} + \dfrac{(by)^2}{ax + cz} + \dfrac{(cz)^2}{ax + by} \geq S$.

117. Să se arate că dacă $a, b, c \in [2, 4]$, atunci:

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq \frac{81}{8}.$$

118. Să se rezolve în numere reale sistemul:

$$\begin{cases} x_2 = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + 1}{2}} \\ x_3 = \sqrt{\dfrac{x_2^2 + 1}{2}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \sqrt{\dfrac{x_{n-1}^2 + 1}{2}} \\ x_1 = \sqrt{\dfrac{x_n^2 + 1}{2}} \end{cases} ; n \in \mathbb{N}; n \geq 3.$$

119. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, $abc = 1$, atunci:

$$a^3(b^2 + c) + c^3(a^2 + b) + b^3(c^2 + a) \geq 6.$$

120. Fie $x, y, z, t, y, v \in [0, 1]$. Să se arate că:

$$y(1-x)+z(1-y)+t(1-z)+u(1-t)+v(1-u)+x(1-v)\le 6.$$

Generalizare: Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, 1]$, $n \ge 3$, $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că:

$$x_2(1-x_1)+x_3(1-x_2)+\ldots+x_n(1-x_1)+x_1(1-x_n)\le \frac{n}{4\sin^2\dfrac{360^\circ}{n}}.$$

121. Să se arate că dacă $x, y, z \in [1, \infty)$, atunci:

$$\sum_{cyc}(x+y)\sqrt{z-1}\le xy+yz+zx.$$

122. Să se afle numerele naturale a, b, c astfel încât:

$$(1+bc)(1+ac)(1+ba)=(1+a)(1+b)(1+c).$$

123. Să se arate că $(\forall)$ $a, b, c \in (0, \infty)$; $a \ne b \ne c \ne a$;

$$\sum_{cyc}\left(a+\frac{2ab}{a+b}-2\sqrt{ab}\right)<\sum_{cyc}|a-b|.$$

124. Să se arate că dacă: $1\le x\le y\le z\le \frac{3}{2}$, atunci:

$$(x+y)\sqrt{3-2z}+(y+z)\sqrt{3-2x}+(z+x)\sqrt{3-2y}<2(xy+yz+xz).$$

125. Să se afle $a, b, c \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$(1+bc)(1+ac)(1+ba)=(1+a)(1+b)(1+c).$$

126. Să se determine $x>0, y>0, z>0$ încât:

$$\begin{cases}(x+y)(1+z)=20\\ xyz=25\end{cases}.$$

127. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, atunci:

$$\sum\left(a+\frac{b}{a^2}\right)\left(1+\frac{a}{b}\right)c\ge 4(a+b+c).$$

Soluţii

1.
$$N=\overline{abcdab}=\overline{ab}\cdot 10000+\overline{cd}\cdot 100+\overline{ab}$$
$$N=\overline{ab}\cdot(10000+700+1)=\overline{ab}\cdot 10701=\overline{ab}\cdot 9\cdot 1189$$
$$N \vdots 1189.$$

2.
$$a=c^3\le 9\Rightarrow c\in\{1,2\}.$$
Dacă $c=1\Rightarrow 1011=n+(n+1)+(n+2)\Rightarrow 1011=3n+3\Rightarrow n=336$. Numerele sunt: 336, 337, 338.
Dacă $c=2\Rightarrow 8042=n+(n+1)+(n+2)\Rightarrow 3n=8039\Rightarrow 8039 \vdots 3$. Fals!

3.
$$A=3n(n^3-1)+6(n^3-1);\quad A=3n(n^3-1)+6(n^3-1);$$
$$A=3(n^3-1)(n+2);\quad A=3(n-1)(n+2)(n^2+n+1);$$
$$A=3(n-1)(n+2)(n^2+n-6+7);$$
$$A=3(n-1)(n+2)(n^2+n-6)+21(n-1)(n+2);$$
A divizibil cu $7\Leftrightarrow 7\,|\,(n-1)(n+2)(n-2)(n+3)\Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow n\in\{7k+1,7k+2,7k+4,7k+5\,|\,k\in\mathbb{Z}\}.$$

4. Dacă $n\ge 5$, ultima cifră a numărului din membrul stâng:
$U(1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+...+1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n)=3$ care nu poate fi ultima cifră a lui m^{2014} care este pătrat perfect. Rezultă $n\le 4$.
Dacă $n=1$, rezultă $1=m^{2014}\Rightarrow m=1$.
Dacă $n=2$, rezultă $3=m^{2014}$. Fals!
Dacă $n=3$, rezultă $9=m^{2014}$. Fals!
Dacă $n=4$, rezultă $33=m^{2014}$. Fals!
Soluție: $n=1$, $m=1$.

5. Dacă ultima cifră a numărului este 0, prin tăierea sa numărul se micşorează de exact 10 ori. Presupunem că ultima cifră este a şi deducem că $1\le a\le 9$.
$$n=10m+a$$
Prin tăierea lui a, n devine m. Pe de altă parte $n=11m$. Rezultă $10m+a=11m\Rightarrow m=a$.
Numerele căutate sunt: $n=10\cdot 1+1=11,$
$$n=10\cdot 2+2=22,$$
$$n=10\cdot 3+3=33.$$
$$..........................$$
$$n=10\cdot 9+9=99.$$

6. $n = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2014\cdot 2015\cdot ...\cdot 4028}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2014}$; $n = 2^{2014}\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2014\cdot 2015\cdot ...\cdot 4028}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 4028}$;
$n = 2^{2014}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot 4027$, de unde 2^{2014} divide *n*, dar 2^{2015} nu divide *n*.

7. Fie numerele naturale consecutive: $a-3;\ a-2;\ a-1;\ a;\ a+1;\ a+2;\ a+3$. Suma este $7a = 7^{2015} \Rightarrow a = 7^{2014}$ deci:
$$7^{2015} = (7^{2014}-3)+(7^{2014}-2)+(7^{2014}-1)+7^{2014}+(7^{2014}+1)+(7^{2014}+2)+(7^{2014}+3).$$

8. Luăm elementul de pe linia *i* şi coloana $j, i, j \in \overline{1,8}$, cu pătrat alb la c_{11}, dat de $c_{ij} = 8(i-1)+p$, unde *p* rezultă ca rest din $i+j-1 = 8q+p;\ 0 \le p < 8$.

1	2	3	4	5	6	7	8
10	11	12	13	14	15	16	9
19	20	21	22	23	24	17	18
28	29	30	31	32	25	26	27
37	38	39	40	33	34	35	36
46	47	48	41	42	43	44	45
55	56	49	50	51	52	53	54
64	57	58	59	60	61	62	63

Suma elementelor de pe pătratele negre este 1056.

9. Considerăm resturile împărțirii numerelor: $10, 10^2, 10^3, ..., 10^{2016}$ la 2015.
Deoarece avem 2016 numere şi doar 2015 posibile resturi diferite, rezultă că avem cel puțin două resturi egale, adică există $m, n \in N; m < n$, încât:
$$10^m = 2015q_1 + r; 10^n = 2015q_2 + r$$
$$10^n - 10^m = 10^m(10^{n-m}-1) = 2015(q_2 - q_1)$$
Rezultă $2015 | 10^{n-m}-1$ (2015 nu divide 10^m). În aceste condiții $10^{n-m}-1 = 999...999$ nu are nicio cifră nenulă şi este multiplu de 2015.

10. $\dfrac{9}{14} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{7}; \dfrac{10}{21} = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}; ...; \dfrac{295}{2016} = \dfrac{1}{288}+\dfrac{1}{7}$

Rezultă: $\dfrac{9}{14} > \dfrac{10}{21} > \dfrac{11}{28} > ... > \dfrac{295}{2016}$; $\dfrac{8+1}{2\cdot 7} > \dfrac{8+2}{3\cdot 7} > \dfrac{8+3}{4\cdot 7} > ... > \dfrac{8+287}{288\cdot 7}$

Termenii din mijloc sunt: $\dfrac{8+143}{7\cdot 143} = \dfrac{151}{1001}$; $\dfrac{8+144}{7\cdot 144} = \dfrac{152}{1008}$.

11. Suma cifrelor lui N este: $a+b+a+7+a=3a+b+7$. Pentru ca N să fie divizibil cu 3 trebuie ca $b \in \{2,5,7\}$. Deoarece $a \in \{1,2,...,9\}$ există 27 de numere divizibile cu 3.

$$N=10^4 a+10^3 b+10^2 a+70+a=10101a+70+1000b=$$
$$=(1443a+10)\cdot 7+1000b.$$

$N \vdots 7$ rezultă $b = 7$ şi $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, de 9 numere. Pentru ca N să fie divizibil cu 21, trebuie ca $b = 7$ şi $b + 7 \vdots 3$. Dar $b + 7 = 14$ şi 14 nu este multiplu de 3, deci nu există un astfel de număr.

12.
$$\overline{xyz}+\overline{yzx}+\overline{zxy}=101(x+y+z)=2727$$
$$x+y+z=27 \Rightarrow x=y=z=9.$$

13. 8 lei se plătesc cu 2 bonuri de 4 lei.
9 lei se plătesc cu un bon de 4 şi unul de 5 lei.
10 lei se plătesc cu două bonuri de 5 lei.
Orice sumă $S \in N; S \geq 12$ lei se poate obține din 8, 9, respectiv 10 lei prin adăugarea unui multiplu de 3 la unul dintre acestea, deoarece:
$$S=3p+8=3(p+2)+2 \in 3N+2$$
sau $S=3p+9=3(p+3) \in 3N$ sau $S=3p+10=3(p+3)+1 \in 3N+1$.

14. Fie şirul: 1, 11, 111, 1111, …, $\underbrace{1111...111}_{k \text{ ori}}$, …

În acest şir există două numere care dau acelaşi rest prin împărțirea la 2017. Fie acestea:
$$a=\underbrace{1111...1}_{\text{de } m+p \text{ ori}}=2017q_2+r,\ m, p \in \mathbb{N};$$
$$b=\underbrace{1111...1}_{\text{de } p \text{ ori}}=2017q_2+r;$$
$$a-b=2017(q_1-q_2)=\underbrace{1111...1}_{\text{de } m \text{ ori}}\cdot 10^m;$$
$$(2017, 10) = 1 \Rightarrow 2017 \mid \underbrace{1111...1}_{\text{de } m \text{ ori}}$$

Numărul cerut este: $n = \underbrace{1111...1}_{\text{de } m \text{ ori}}$.

15.
$$\overline{aaabbb}=10^5 a+10^4 a+10^3 a+10^2 b+10b+b=p^2$$
$$10^3\cdot 101a+101b=p^2$$
$$101 \mid p^2 \Rightarrow 101 \mid p \Rightarrow p=101q \Rightarrow 10^3 a+b=101q^2$$