Petre Năchilă Ana Cârstoveanu Ion Nica

MATEMATICĂ M2

Ghid pentru pregătirea examenului de Bacalaureat

- **Itemi de antrenament**
- **99 de teste**
- **Modele de subiecte date în perioada 2014-2019**

Editura NOMINA

Lucrare în conformitate cu programa pentru examenul de bacalaureat.

Editor: Alexandru Creangă

Pentru comenzi prin poştă: 0757.020.442
0348.439.417

Reprezentant zonal:	Zona:
Dobrin Marius (0741.488.918)	Oltenia (Dolj, Gorj şi Mehedinţi), Banat şi Transilvania (Alba şi Hunedoara);
Vesa Adrian (0748.111.247)	Crişana şi Transilvania (Sălaj, Cluj, Mureş, Harghita şi Covasna);
Cepăreanu Alin (0751.207.922)	Oltenia (Vâlcea şi Olt), Transilvania (Braşov şi Sibiu) şi Muntenia (Argeş, Teleorman şi Giurgiu);
Săsărman Traian (0757.020.443)	Transilvania (jud. Bistriţa-Năsăud) şi zona Maramureş;
Lungu Ion (0746.200.413)	Buzău, Bacău, Neamţ, Suceava;
Alexe Cornel (0769.221.685)	Vrancea, Vaslui, Iaşi, Botoşani;
Lungu Ionuţ (0744.429.512)	Muntenia (Dâmboviţa, Prahova, Brăila, Ialomiţa şi Călăraşi), Dobrogea şi jud. Galaţi;
Anton Victor (0755.107.291, 0769.221.680)	Bucureşti
Cojocaru Marcela (0757.020.440)	Bucureşti

Punct de lucru: comuna Bradu, DN 65B, nr. 31, jud. Argeş
Tel.: 0348.439.417/ Fax: 0348.439.416
e-mail: comenzi.nomina@gmail.com
www.edituranomina.ro
www.librarianomina.ro

ISBN 978-606-535-842-3

PROGRAMA DE EXAMEN MATEMATICĂ – BACALAUREAT

PROGRAMA *M_şt-nat*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

CLASA a IX-a – 4 ore / săpt. (TC+CD)

Mulţimi şi elemente de logică matematică • Mulţimea numerelor reale: operaţii algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real, aproximări prin lipsă sau prin adaos, partea întreagă, partea fracţionară a unui număr real; operaţii cu intervale de numere reale; • Propoziţie, predicat, cuantificatori; • Operaţii logice elementare (negaţie, conjuncţie, disjuncţie, implicaţie, echivalenţă), corelate cu operaţiile şi cu relaţiile dintre mulţimi (complementară, intersecţie, reuniune, incluziune, egalitate); raţionament prin reducere la absurd; • Inducţia matematică.
Şiruri • Modalităţi de a defini un şir; şiruri mărginite, şiruri monotone; • Şiruri particulare: progresii aritmetice, progresii geometrice, formula termenului general în funcţie de un termen dat şi raţie, suma primilor n termeni ai unei progresii; • Condiţia ca n numere să fie în progresie aritmetică sau geometrică pentru $n \geq 3$.
Funcţii; lecturi grafice • Reper cartezian, produs cartezian, reprezentarea prin puncte a unui produs cartezian de mulţimi numerice; condiţii algebrice pentru puncte aflate în cadrane; drepte în plan de forma $x = m$ sau $y = m$, cu $m \in \mathbb{R}$. • Funcţia: definiţie, exemple, exemple de corespondenţe care nu sunt funcţii, modalităţi de a descrie o funcţie, lecturi grafice. Egalitatea a două funcţii, imaginea unei mulţimi printr-o funcţie, graficul unei funcţii, restricţii ale unei funcţii; • Funcţii numerice ($F = \{f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}\}$); reprezentarea geometrică a graficului: intersecţia cu axele de coordonate, rezolvări grafice ale unor ecuaţii şi inecuaţii de forma $f(x) = g(x)$ ($\leq, <, >, \geq$); proprietăţi ale funcţiilor numerice introduse prin lectură grafică: mărginirea, monotonie; alte proprietăţi: paritate, imparitate, simetria graficului faţă de drepte de forma $x = m$, $m \in \mathbb{R}$, periodicitate; • Compunerea funcţiilor; exemple pe funcţii numerice.
Funcţia de gradul I • Definiţie; • Reprezentarea grafică a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, intersecţia graficului cu axele de coordonate, ecuaţia $f(x) = 0$; • Interpretarea grafică a proprietăţilor algebrice ale funcţiei: monotonie şi semnul funcţiei; studiul monotoniei prin semnul diferenţei $f(x_1) - f(x_2)$ (sau prin studierea semnului raportului $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$); • Inecuaţii de forma $ax + b \leq 0$ ($<, >, \geq$), studiate pe $\mathbb{R}$ sau pe intervale de numere reale; • Poziţia relativă a două drepte; sisteme de ecuaţii de tipul $\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \end{cases}$, $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$. • Sisteme de inecuaţii de gradul I.
Funcţia de gradul al II-lea • Reprezentarea grafică a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$, intersecţia graficului cu axele de coordonate, ecuaţia $f(x) = 0$, simetria faţă de drepte de forma $x = m$, cu $m \in \mathbb{R}$. • Relaţiile lui Viète, rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$, $s, p \in \mathbb{R}$.

Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al II-lea • Monotonie; studiul monotoniei prin semnul diferenței $f(x_1) - f(x_2)$ sau prin rata creșterii/descreșterii: $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$, punct de extrem, vârful parabolei; • Poziționarea parabolei față de axa Ox, semnul funcției, inecuații de forma $ax^2 + bx + c \leq 0$ ($\geq, <, >$), cu $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, studiate pe $\mathbb{R}$ sau pe intervale de numere reale, interpretare geometrică: imagini ale unor intervale (proiecțiile unor porțiuni de parabolă pe axa Oy); • Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă: rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} mx+n=y \\ ax^2+bx+c=y \end{cases}$, $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$.
Vectori în plan • Segment orientat, vectori, vectori coliniari; • Operații cu vectori: adunarea (regula triunghiului, regula paralelogramului), proprietăți ale operației de adunare, înmulțirea cu scalari, proprietăți ale înmulțirii cu scalari, condiția de coliniaritate, descompunerea după doi vectori dați, necoliniari și nenuli.
Coliniaritate, concurență, paralelism – calcul vectorial în geometria plană • Vectorul de poziție al unui punct; • Vectorul de poziție al punctului care împarte un segment într-un raport dat, teorema lui Thales (condiții de paralelism); • Vectorul de poziție al centrului de greutate al unui triunghi (concurența medianelor unui triunghi); • Teorema lui Menelau, teorema lui Ceva.
Elemente de trigonometrie • Cercul trigonometric, definirea funcțiilor trigonometrice: sin, cos : $[0, 2\pi] \to [-1, 1]$, tg : $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, ctg : $(0, \pi) \to \mathbb{R}$; • Definirea funcțiilor trigonometrice: sin : $\mathbb{R} \to [-1, 1]$, cos : $\mathbb{R} \to [-1, 1]$, tg : $\mathbb{R} \setminus D \to \mathbb{R}$, cu $D = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle\| k \in \mathbb{Z}\right\}$, ctg : $\mathbb{R} \setminus D \to \mathbb{R}$, cu $D = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; • Reducerea la primul cadran; formule trigonometrice: $\sin(a + b)$, $\sin(a - b)$, $\cos(a + b)$, $\cos(a - b)$, $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\sin a + \sin b$, $\sin a - \sin b$, $\cos a + \cos b$, $\cos a - \cos b$ (transformarea sumei în produs). **Aplicații ale trigonometriei și ale produsului scalar a doi vectori în geometria plană** • Produsul scalar a doi vectori: definiție, proprietăți. Aplicații: teorema cosinusului, condiții de perpendicularitate, rezolvarea triunghiului dreptunghic; • Aplicații vectoriale și trigonometrice în geometrie: teorema sinusurilor, rezolvarea triunghiurilor oarecare; • Calcularea razei cercului înscris și a razei cercului circumscris în triunghi, calcularea lungimilor unor segmente importante din triunghi, calcularea unor arii.

CLASA a X-a – 4 ore / săpt. (TC + CD)

Mulțimi de numere • **Numere reale**: proprietăți ale puterilor cu exponent rațional, irațional și real ale unui număr pozitiv, nenul, aproximări raționale pentru numere reale; • Radical de ordin n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) dintr-un număr, proprietăți ale radicalilor; • Noțiunea de logaritm, proprietăți ale logaritmilor, calcule cu logaritmi, operația de logaritmare; • **Mulțimea $\mathbb{C}$.** Numere complexe sub formă algebrică, conjugatul unui număr complex, operații cu numere complexe. Interpretarea geometrică a operațiilor de adunare și de scădere a numerelor complexe și a înmulțirii acestora cu un număr real; • Rezolvarea în $\mathbb{R}$ a ecuației de gradul al doilea cu coeficienți reali. Ecuații bipătrate.

Funcții și ecuații • Funcția putere: $f : \mathbb{R} \to D, f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ • Funcția radical: $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{R}$ și $n \geq 2$, unde $D = [0, \infty)$ pentru n par și $D = \mathbb{R}$ pentru n impar; • Funcția exponențială $f : \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = a^x$, $a \in (0, \infty)$, $a \neq 1$ și funcția logaritmică $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) =$ $= \log_a x$, $a \in (0, \infty)$, $a \neq 1$; • Funcții trigonometrice directe și inverse; • Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate; funcții inversabile: definiție, proprietăți grafice, condiția necesară și suficientă ca o funcție să fie inversabilă; • Rezolvări de ecuații folosind proprietățile funcțiilor: 1. Ecuații care conțin radicali de ordinul 2 sau 3; 2. Ecuații exponențiale, ecuații logaritmice; 3. Ecuații trigonometrice: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $a \in [-1, 1]$, $\text{tg}\, x = a$, $\text{ctg}\, x = a$, $a \in \mathbb{R}$, $\sin f(x) = \sin g(x)$, $\cos f(x) = \cos g(x)$, $\text{tg}\, f(x) = \text{tg}\, g(x)$, $\text{ctg}\, f(x) = \text{ctg}\, g(x)$. **Notă:** *Pentru toate tipurile de funcții se vor studia: intersecția cu axele de coordonate, ecuația $f(x) = 0$, reprezentarea grafică prin puncte, simetrie, lectura grafică a proprietăților algebrice ale funcțiilor: monotonie, bijectivitate, inversabilitate, semn, concavitate / convexitate.*
Metode de numărare • Mulțimi finite ordonate. Numărul funcțiilor $f : A \to B$, unde A și B sunt mulțimi finite; • Permutări – numărul de mulțimi ordonate cu n elemente care se obțin prin ordonarea unei mulțimi finite cu n elemente; – numărul funcțiilor bijective $f : A \to B$, unde A și B sunt mulțimi finite; • Aranjamente – numărul submulțimilor ordonate cu câte m elemente fiecare, $m \leq n$ care se pot forma cu cele n elemente ale unei mulțimi finite; – numărul funcțiilor injective $f : A \to B$, unde A și B sunt mulțimi finite; • Combinări – numărul submulțimilor cu câte k elemente, unde $0 \leq k \leq n$ ale unei mulțimi finite cu n elemente. Proprietăți: formula combinărilor complementare, numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi cu n elemente. • Binomul lui Newton.
Matematici financiare • Elemente de calcul financiar: procente, dobânzi, TVA; • Culegerea, clasificarea și prelucrarea datelor statistice: date statistice, reprezentarea grafică a datelor statistice; • Interpretarea datelor statistice prin parametrii de poziție: medii, dispersia, abateri de la medie; • Evenimente aleatoare egal probabile, operații cu evenimente, probabilitatea unui eveniment compus din evenimente egal probabile. **Notă:** *Aplicațiile vor fi din domeniul financiar: profit, preț de cost al unui produs, amortizări de investiții, tipuri de credite, metode de finanțare, buget personal, buget familial.*
Geometrie • Reper cartezian în plan, coordonate carteziene în plan, distanța dintre două puncte în plan; • Coordonatele unui vector în plan, coordonatele sumei vectoriale, coordonatele produsului dintre un vector și un număr real; • Ecuații ale dreptei în plan determinate de un punct și de o direcție dată și ale dreptei determinate de două puncte distincte; • Condiții de paralelism, condiții de perpendicularitate a două drepte din plan, calcularea unor distanțe și a unor arii.

CLASA a XI-a – 3 ore / săpt.

Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare **Matrice** • Tabel de tip matriceal. Matrice, mulțimi de matrice; • Operații cu matrice: adunarea, înmulțirea, înmulțirea unei matrice cu un scalar, proprietăți. **Determinanți** • Determinantul unei matrice pătratice de ordin cel mult 3, proprietăți; • Aplicații: ecuația unei drepte determinate de două puncte distincte, aria unui triunghi și coliniaritatea a trei puncte în plan.

Sisteme de ecuații liniare

• Matrice inversabile din $M_n(\mathbb{R})$, $n = \overline{2,3}$;
• Ecuații matriceale;
• Sisteme liniare cu cel mult 3 necunoscute; forma matriceală a unui sistem liniar;
• Metoda Cramer de rezolvare a sistemelor liniare.

Elemente de analiză matematică

Limite de funcții

• Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală: intervale, mărginire, vecinătăți, dreapta încheiată, simbolurile $+\infty$ și $-\infty$;
• Limite de funcții: interpretarea grafică a limitei într-un punct utilizând vecinătăți, limite laterale;
• Calculul limitelor pentru funcția de gradul I, funcția de gradul al II-lea, funcția logaritmică, funcția exponențială, funcția putere ($n = \overline{2,3}$), funcția radical ($n = \overline{2,3}$), funcția raport de două funcții cu grad cel mult 2, cazuri exceptate la calculul limitelor de funcții: $0/0$, ∞/∞, $0 \cdot \infty$;
• Asimptotele graficului funcțiilor studiate: verticale, orizontale și oblice.

Funcții continue

• Continuitatea unei funcții într-un punct al domeniului de definiție; funcții continue, interpretarea grafică a continuității unei funcții, operații cu funcții continue;
• Semnul unei funcții continue pe un interval de numere reale utilizând consecința proprietății lui Darboux.

Funcții derivabile

• Tangenta la o curbă. Derivata unei funcții într-un punct, funcții derivabile;
• Operații cu funcții derivabile, calculul derivatelor de ordin I și II pentru funcțiile studiate;
• Regulile lui l'Hospital pentru cazurile: $0/0$, ∞/∞.

Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor

• Rolul derivatelor de ordinul I și al II-lea în studiul funcțiilor: monotonie, puncte de extrem, concavitate, convexitate;
• Reprezentarea grafică a funcțiilor.

Note: *Se utilizează exprimarea „proprietatea lui ...", „regula lui ...", pentru a sublinia faptul că se face referire la un rezultat matematic utilizat în aplicații, dar a cărui demonstrație este în afara programei.*

CLASA a XII-a – 4 ore / săpt.

Elemente de algebră

Grupuri

• Lege de compoziție internă, tabla operației;
• Grup, exemple: grupuri numerice, grupuri de matrice, grupul aditiv al claselor de resturi modulo n;
• Morfism și izomorfism de grupuri.

Inele și corpuri

• Inel, exemple: inele numerice ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), $\mathbb{Z}_n$, inele de matrice, inele de funcții reale;
• Corp, exemple: corpuri numerice ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), $\mathbb{Z}_p$, p prim.

Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$, p prim)

• Forma algebrică a unui polinom, operații (adunarea, înmulțirea, înmulțirea cu un scalar);
• Teorema împărțirii cu rest; împărțirea polinoamelor, împărțirea cu $X - a$, schema lui Horner;
• Divizibilitatea polinoamelor, teorema lui Bézout, c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. al unor polinoame; descompunerea unor polinoame în factori ireductibili;
• Rădăcini ale polinoamelor; relațiile lui Viète pentru polinoame de grad cel mult 4;
• Rezolvarea ecuațiilor algebrice având coeficienți în $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ecuații binome, ecuații reciproce, ecuații bipătrate.

Elemente de analiză matematică

• Probleme care conduc la noțiunea de integrală.

Primitive (antiderivate)

• Primitivele unei funcții definită pe un interval. Integrala nedefinită a unei funcții continue, proprietatea de liniaritate a integralei nedefinite. Primitive uzuale.

Integrala definită

• Definirea integralei Riemann a unei funcții continue prin formula Leibniz-Newton;

• Proprietăți ale integralei definite: liniaritate, monotonie, aditivitate în raport cu intervalul de integrare; • Metode de calcul al integralelor definite: integrarea prin părți, integrarea prin schimbarea de variabilă. Calculul integralelor de forma $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, grad $Q \leq 4$ prin metoda descompunerii în fracții simple. **Aplicații ale integralei definite** • Aria unei suprafețe plane; • Volumul unui corp de rotație. **Notă:** *Se utilizează exprimare „proprietate" sau „regulă" pentru a sublinia faptul că se face referire la un rezultat matematic, utilizat în aplicații, dar a cărui demonstrație este în afara programei.*

PROGRAMA *M_tehnologic*

Filiera tehnologică, profilul servicii, toate calificările profesionale, profilul resurse naturale şi protecția mediului, toate calificările profesionale, profilul tehnic, toate calificările profesionale

CLASA a IX-a – 2 ore / săpt. (TC+CD)

Mulțimi şi elemente de logică matematică • Mulțimea numerelor reale: operații algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real, aproximări prin lipsă sau prin adaos; operații cu intervale de numere reale • Propoziție, predicat, cuantificatori; • Operații logice elementare (negație, conjuncție, disjuncție, implicație, echivalență), corelate cu operațiile şi cu relațiile dintre mulțimi (complementară, intersecție, reuniune, incluziune, egalitate); • Inducția matematică.
Şiruri • Modalități de a descrie un şir; şiruri particulare: progresii aritmetice, progresii geometrice, aflarea termenului general al unei progresii; suma primilor n termeni ai unei progresii. • Condiția ca n numere să fie în progresie aritmetică sau geometrică, $n \geq 3$.
Funcții; lecturi grafice • Reper cartezian, produs cartezian, reprezentarea prin puncte a unui produs cartezian de mulțimi numerice; • Condiții algebrice pentru puncte aflate în cadrane; drepte de forma $x = m$ sau de forma $y = m$, $m \in \mathbb{R}$; • Funcția: definiție, exemple, exemple de corespondențe care nu sunt funcții, modalități de a descrie o funcție; egalitatea a două funcții, imaginea unei funcții; • Funcții numerice $f : I \to \mathbb{R}$, I interval de numere reale; proprietăți ale funcțiilor numerice prin lecturi grafice: reprezentarea geometrică a graficului, intersecția graficului cu axele de coordonate, interpretarea grafică a unor ecuații de forma $f(x) = g(x)$; proprietăți ale funcțiilor numerice introduse prin lectură grafică: mărginire, monotonie, paritate/imparitate (simetria graficului față de Oy sau origine), periodicitate; • Compunerea funcțiilor; exemple de funcții numerice.
Funcția de gradul I • Definiție; • Reprezentarea grafică a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, intersecția graficului cu axele de coordonate, ecuația $f(x) = 0$; • Interpretarea grafică a proprietăților algebrice ale funcției: monotonie, semnul funcției; • Inecuații de forma $ax + b \leq 0$ ($<, >, \geq$), $a, b \in \mathbb{R}$ studiate pe $\mathbb{R}$; • Poziția relativă a două drepte; sisteme de tipul $\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = p \end{cases}$, $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$.
Funcția de gradul al II-lea • Reprezentarea grafică a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, intersecția graficului cu axele de coordonate, ecuația $f(x) = 0$; simetria față de drepte de forma $x = m$, $m \in \mathbb{R}$; • Relațiile lui Viète, rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$ $s, p \in \mathbb{R}$.

Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al II-lea • Monotonie; punct de extrem, vârful parabolei, interpretare geometrică; • Poziționarea parabolei față de axa Ox; • Semnul funcției, inecuații de forma $ax^2 + bx + c \le 0$ ($\ge, <, >$), $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \ne 0$, interpretare geometrică; • Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă; • Rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} mx + n = y \\ ax^2 + bx + c = y \end{cases}$, $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$, interpretare geometrică.
Vectori în plan • Segment orientat, vectori, vectori coliniari; • Operații cu vectori: adunarea (regula triunghiului, regula paralelogramului), proprietăți ale operației de adunare; înmulțirea cu scalari, condiția de coliniaritate, descompunerea după doi vectori.
Trigonometrie și aplicații ale trigonometriei în geometrie • Rezolvarea triunghiului dreptunghic; • Cercul trigonometric, definirea funcțiilor trigonometrice: $\sin, \cos : [0, 2\pi] \to [-1, 1]$, $\mathrm{tg} : [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{ctg} : (0, \pi) \to \mathbb{R}$; • Definirea funcțiilor trigonometrice: $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $\mathrm{tg} : \mathbb{R} \setminus D \to \mathbb{R}$, cu $D = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle\vert k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\mathrm{ctg} : \mathbb{R} \setminus D \to \mathbb{R}$, cu $D = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; • Reducerea la primul cadran; formule trigonometrice: $\sin(a + b)$, $\sin(a - b)$, $\cos(a + b)$, $\cos(a - b)$, $\sin 2a$, $\cos 2a$; • Modalități de calcul a lungimii unui segment și a măsurii unui unghi: teorema sinusurilor și teorema cosinusului.

CLASA a X-a – 3 ore / săpt. (TC + CD)

Numere reale: • Proprietăți ale puterilor cu exponent rațional, irațional și real ale unui număr pozitiv nenul; • Media aritmetică, media ponderată, media geometrică, media armonică; • Radical dintr-un număr (ordin 2 sau 3), proprietăți ale radicalilor; • Noțiunea de logaritm, proprietăți ale logaritmilor, calcule cu logaritmi, operația de logaritmare. • **Mulțimea $\mathbb{C}$.** Numere complexe sub formă algebrică, conjugatul unui număr complex, operații cu numere complexe. Rezolvarea în $\mathbb{C}$ a ecuației de gradul al doilea având coeficienți reali.
Funcții și ecuații • Funcția putere: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ • Funcția radical: $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n = \overline{2,3}$, unde $D = [0, \infty)$ pentru n par și $D = \mathbb{R}$ pentru n impar; • Funcția exponențială $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$, $a \in (0, \infty)$, $a \ne 1$ și funcția logaritmică $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a \in (0, \infty)$, $a \ne 1$; • Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate; funcții inversabile: definiție, proprietăți grafice, condiția necesară și suficientă ca o funcție să fie inversabilă; • Funcții trigonometrice directe și inverse; • Rezolvări de ecuații folosind proprietățile funcțiilor: – Ecuații care conțin radicali de ordinul 2 sau 3; – Ecuații exponențiale, ecuații logaritmice, utilizarea unor substituții care conduc la rezolvarea de ecuații algebrice;
Metode de numărare • Mulțimi finite; • Permutări, aranjamente, combinări numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi cu n elemente.
Matematici financiare • Elemente de calcul financiar: procente, dobânzi; TVA; • Culegerea, clasificarea și prelucrarea datelor statistice: date statistice, reprezentarea grafică a datelor statistice;

• Interpretarea datelor statistice prin lectura reprezentărilor grafice; • Evenimente aleatoare egal probabile; probabilitatea unui eveniment compus din evenimente egal probabile.
Geometrie • Reper cartezian în plan, coordonate carteziene în plan, distanța dintre două puncte în plan; • Coordonatele unui vector în plan, coordonatele sumei vectoriale, coordonatele produsului dintre un vector și un număr real; • Ecuații ale dreptei în plan determinate de un punct și de o direcție dată și ale dreptei determinate de două puncte distincte, calcule de distanțe și de arii; • Condiții de paralelism, condiții de perpendicularitate a două drepte în plan; linii importante în triunghi, calcularea unor distanțe și a unor arii.

CLASA a XI-a – 3 ore / săpt. (TC+CD)

Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare **Matrice** • Tabel de tip matriceal. Matrice, mulțimi de matrice; • Operații cu matrice: adunarea, înmulțirea, înmulțirea unei matrice cu un scalar, proprietăți. **Determinanți** • Determinantul unei matrice pătratice de ordin cel mult 3, proprietăți; • Aplicații: ecuația unei drepte determinate de două puncte distincte, aria unui triunghi și coliniaritatea a trei puncte în plan. **Sisteme de ecuații liniare** • Matrice inversabile din $M_n(\mathbb{R})$, $n = \overline{2,3}$; • Ecuații matriceale; • Sisteme liniare cu cel mult 3 necunoscute; forma matriceală a unui sistem liniar; • Metoda lui Cramer de rezolvare a sistemelor liniare.
Elemente de analiză matematică **Limite de funcții** • Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală: intervale, mărginire, vecinătăți, dreapta încheiată, simbolurile $+\infty$ și $-\infty$; • Limite de funcții: interpretarea grafică a limitei unei funcții într-un punct utilizând vecinătăți, limite laterale; • Calculul limitelor pentru funcția de gradul I, funcția de gradul al II-lea, funcția logaritmică, funcția exponențială, funcția putere ($n = \overline{2,3}$), funcția radical ($n = \overline{2,3}$), funcția raport de două funcții cu grad cel mult 2, cazuri exceptate la calculul limitelor de funcții: 0/0, ∞/∞, $0 \cdot \infty$; • Asimptotele graficului funcțiilor studiate: verticale, orizontale și oblice. **Funcții continue** • Continuitatea unei funcții într-un punct al domeniului de definiție, funcții continue, interpretarea grafică a continuității unei funcții, operații cu funcții continue; • Semnul unei funcții continue pe un interval de numere reale utilizând consecința proprietății lui Darboux. **Funcții derivabile** • Tangenta la o curbă. Derivata unei funcții într-un punct, funcții derivabile; • Operații cu funcții derivabile, calculul derivatelor de ordin I și II pentru funcțiile studiate; • Regulile lui l'Hospital pentru cazurile: 0/0, ∞/∞. **Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor** • Rolul derivatelor de ordinul I și al II-lea în studiul funcțiilor: monotonie, puncte de extrem, concavitate, convexitate; • Reprezentarea grafică a funcțiilor.

CLASA a XII-a – 3 ore / săpt. (TC + CD

Elemente de algebră **Grupuri** • Lege de compoziție internă, tabla operației; • Grup, exemple: grupuri numerice, grupul aditiv al claselor de resturi modulo n; • Morfism și izomorfism de grupuri.

Inele şi corpuri • Inel, exemple: inele numerice ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), $\mathbb{Z}_n$; • Corp, exemple: corpuri numerice ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), $\mathbb{Z}_p$, p prim. **Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$, p prim)** • Forma algebrică a unui polinom, operații (adunarea, înmulțirea, înmulțirea cu un scalar); • Teorema împărțirii cu rest; împărțirea polinoamelor, împărțirea cu $X - a$, schema lui Horner; • Divizibilitatea polinoamelor, teorema lui Bézout; • Rădăcini ale polinoamelor; relațiile lui Viète pentru polinoame de grad cel mult 3.
Elemente de analiză matematică **Primitive** (antiderivate) • Primitivele unei funcții definite pe un interval. Integrala nedefinită a unei funcții continue, proprietatea de liniaritate a integralei nedefinite. Primitive uzuale. **Integrala definită** • Definirea integralei Riemann a unei funcții continue prin formula Leibniz-Newton; • Proprietăți ale integralei definite: liniaritate, monotonie, aditivitate în raport cu intervalul de integrare; • Metode de calcul ale integralelor definite: integrarea prin părți, integrarea prin schimbarea de variabilă. Calculul integralelor de forma $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, grad $Q \leq 2$. **Aplicații ale integralei definite** • Aria unei suprafețe plane; • Volumul unui corp de rotație.

BREVIAR TEORETIC

CLASA a IX-a

ALGEBRĂ

I. Numere reale

- **Mulțimi finite. Reguli de numărare**

- O mulțime este ***finită*** dacă are n elemente, $n \in \mathbb{N}$.

- O mulțime este infinită dacă nu este finită.

- O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numește ***mărginită*** dacă $\exists$ m, $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \le x \le M$, $\forall x \in$ $\in A$.

Regula sumei: Dacă un anumit obiect A poate fi ales în m moduri, iar un alt obiect B poate fi ales în n moduri, atunci alegerea „lui A sau B" poate fi realizată în (m + n) moduri.

Regula produsului: Dacă un obiect A se poate alege în m moduri și dacă după fiecare astfel de alegere, un obiect B se poate alege în n moduri, atunci alegerea perechii (A, B) în această ordine, poate fi realizată în $m \cdot n$ moduri.

- **Modulul unui număr real**: $|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

a) $|x| \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

b) $|-x| = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$

c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

d) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}^*$

e) $||x| - |y|| \le |x + y| \le |x| + |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

f) $|x| = a$, $a > 0 \Leftrightarrow x = \pm a$

g) $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$, $a > 0$

h) $|x| \ge a \Leftrightarrow x \le -a$ sau $x \ge a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$, $a > 0$

- **Partea întreagă și partea fracționară**

- Se numește ***partea întreagă*** a numărului real x, notată [x], cel mai mare întreg mai mic sau egal cu x. Deci $[x] \in \mathbb{Z}$ și $[x] \le x < [x] + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Se numește ***partea fracționară*** a numărului real x, notată cu $\{x\}$, diferența dintre x și partea lui întreagă. Deci $\{x\} \in [0, 1)$ și $\{x\} = x - [x]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Proprietăți:

a) $x \in [k, k + 1)$; $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = k$;

b) $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \{x\} = 0$;

c) $[x + n] = [x] + n, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$;

d) $\{x + n\} = \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$;

e) $x - 1 < [x] \le x, \forall x \in \mathbb{R}$.

- **Inegalități remarcabile** (pentru două numere reale)

  a) Inegalitatea mediilor: $\forall$ a, b > 0 avem:

$$\min(a, b) \le \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \max(a, b)\ ;$$

  b) Inegalitatea Cauchy–Buniakovski–Schwartz:

$$a, b, x, y \in \mathbb{R}, (ax + by)^2 \le (a^2 + b^2)(x^2 + y^2);$$

  c) Inegalitatea lui Bernoulli:

$$\alpha > 0, r > -1, r \in \mathbb{Q}, (1 + \alpha)^r > 1 + r\alpha.$$

- **Principiul inducției matematice**

Propoziția p(n) este adevărată pentru $\forall n \in \mathbb{N}$ dacă sunt verificate următoarele două condiții:

1. Propoziția p(n) este adevărată pentru $n = 0$;
2. Din presupunerea că p(n) este adevărată pentru $n = k$, $k \in \mathbb{N}$ rezultă că este adevărată pentru $n = k + 1$.

Etapele inducției matematice

I. ***Verificarea propoziției***: pentru $n = 0$ verificăm dacă p(0) este adevărată;

II. ***Demonstrația***: $p(k) \to p(k + 1)$. Presupunem că p(k) este adevărată şi demonstrăm că p(k + 1) este de asemenea adevărată. Dacă cele două etape sunt validate, atunci are loc

Concluzia: Propoziția p(n) este adevărată, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Formule care pot fi demonstrate prin inducție matematică:

a) $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}^*$;

b) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}^*$;

c) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, n \in \mathbb{N}^*$.

II. Progresii aritmetice și geometrice

- Şirul $(a_n)_{n\ge1}$ se numeşte **progresie aritmetică** dacă $a_1 \in \mathbb{R}$ şi $a_{n+1} = a_n + r, \forall n \ge 1, r \in \mathbb{R}$, unde r se numeşte rația progresiei aritmetice.

Proprietăți:

a) Formula termenului general este $a_n = a_1 + (n - 1)r, \forall n \ge 1$;

b) $(a_n)_{n\ge1}$ progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n \ge 2$;

c) $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt în progresie aritmetică $\Leftrightarrow a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = ... = a_k + a_{n-k+1}, \forall k = \overline{1, n}$

d) $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \forall n \ge 1$.

- Şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ se numeşte **progresie geometrică** dacă $b_1 \in \mathbb{R}^*$ şi $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $\forall\ n \geq 1$; $q \neq 0$ se numeşte rația progresiei geometrice.

Proprietăți:

a) Formula termenului general este $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $\forall\ n \geq 1$;

b) $(b_n)_{n\geq 1}$ e progresie geometrică $\Leftrightarrow\ b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $\forall\ n \geq 1$;

c) $b_1, b_2, ..., b_n$ sunt în progresie geometrică $\Leftrightarrow b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = ... = b_k \cdot b_{n-k+1}$, $\forall\ k = \overline{1,n}$

d) $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = \begin{cases} b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1 \\ nb_1, \quad q = 1 \end{cases}$.

III. Funcții

- Fie $A, B \neq \emptyset$, $f: A \to B$ se numeşte funcție definită pe A cu valori în B, dacă oricărui x din A i se asociază un unic element y din B.

A se numeşte ***domeniu de definiție***, B se numeşte ***codomeniu***, iar f se numeşte ***lege de corespondență***.

- Graficul unei funcții este mulțimea: $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$.
- ***Proprietăți***:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte funcție **pară** dacă $f(-x) = f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte funcție **impară**; $f(-x) = -f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte funcție **periodică** dacă există $T > 0$, astfel încât $f(x + T) = f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$;

d) $f: A \to B$, atunci $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ se numeşte **imaginea funcției f**;

e) $f: A \to B$ este **crescătoare** pe $I \subseteq A$ dacă $\forall\ x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ sau dacă $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$; (f este strict crescătoare pe $I \subseteq A$ dacă $\forall\ x_1 < x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

f) $f: A \to B$ este **descrescătoare** pe $I \subseteq A$ dacă $\forall\ x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ sau dacă $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0$; (f este strict descrescătoare pe $I \subseteq A$ dacă $\forall\ x_1 < x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

g) Graficul lui $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are axă de simetrie dreapta $x = a$, dacă $f(a + x) = f(a - x)$ sau $f(x) = f(2a - x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

- Dacă $f: A \to B$ şi $g: B \to C$, funcția $g \circ f: A \to C$ se numeşte compunerea lui f cu g şi $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
- Funcția $f: A \to B$ este inversabilă dacă există o funcție $g: B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$. Funcția g se numeşte inversa lui f şi se notează cu f^{-1}.

- **Funcția de gradul I**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$

Monotonia:

a) f strict crescătoare pentru $a > 0$;

b) f strict descrescătoare pentru $a < 0$;

Semnul:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Semn contrar lui a	0	semnul lui a

Graficul este o dreaptă.

- **Funcția de gradul II**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$

Forma canonică: $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$;

Monotonia:

$a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f(x)		$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	

$$\min f(x) = -\frac{\Delta}{4a} \text{ pentru } x = -\frac{b}{2a} \text{ şi } \operatorname{Im} f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$$

$a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f(x)		$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	

$$\max f(x) = -\frac{\Delta}{4a} \text{ pentru } x = -\frac{b}{2a} \text{ şi } \operatorname{Im} f = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$$

Semnul:

$\Delta > 0$

x	$-\infty$	x_1		x_2		$+\infty$
f(x)	semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a	

$\Delta = 0$

x	$-\infty$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f(x)	semnul lui a	0	semnul lui a	

$\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)	semnul lui a	

Graficul este o parabolă cu vârful $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ şi $x = -\frac{b}{2a}$ axă de simetrie.

- **Ecuații de gradul al II-lea**

$ax^2 + bx + c = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac$; $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

- Descompunerea în factori: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;

- Natura rădăcinilor:

$\Delta > 0 \Rightarrow x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$;

$\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$;

$\Delta < 0 \Rightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$.

- Relațiile lui Viete:

$S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$; $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$; $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$; $x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS$;

- Dacă se cunosc rădăcinile x_1 și x_2 ecuația de gradul al II-lea care are aceste soluții este: $x^2 - Sx + P = 0$;

- Notăm $s_n = x_1^n + x_2^n$, atunci $as_n + bs_{n-1} + cs_{n-2} = 0$.

GEOMETRIE ȘI TRIGONOMETRIE

I. Vectori în plan

- Fie A, B, C trei puncte necoliniare. Atunci:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ sau $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$;

b) Dacă $M \in BC$, astfel încât $\dfrac{MB}{CM} = k \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \dfrac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}$;

c) Dacă M este mijlocul lui BC $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

- Doi vectori $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ se numesc coliniari dacă au aceeași direcție; $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ coliniari $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{CD}$.

- În reperul cartezian $(O, \vec{i}, \vec{j})$ considerăm punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $M(x, y)$. Atunci:

a) $\vec{v} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ se numește vectorul de poziție al punctului M;

b) $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = \left|\vec{v}\right|$;

c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$;

d) Notăm $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ și $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$; $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cos\varphi$, unde $\varphi = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ se numește produsul scalar a 2 vectori în plan;

e) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = x_1x_2 + y_1y_2$ pentru că $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{j} = 1$ și $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$;

f) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$;

g) $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniari $\Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u} = \alpha\vec{v} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$.

II. Geometrie analitică în plan

Fie (Oxy) un reper cartezian şi $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ trei puncte în plan. Atunci:

a) $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$;

b) Dacă M este mijlocul segmentului [AB] $\Rightarrow$ $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$;

c) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC $\Rightarrow$ $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$;

d) ***Panta*** unei drepte: $m = \operatorname{tg} \alpha$ este tangenta unghiului pe care îl face o dreaptă cu direcția pozitivă a axei Ox; $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$;

e) Ecuația generală a dreptei: $ax + by + c = 0$;

f) Ecuația dreptei determinată de două puncte A şi B este:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \text{ sau } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

g) Ecuația dreptei determinată de un punct $M_0(x_0, y_0)$ şi panta m este $y - y_0 = m(x - x_0)$;

h) Ecuația explicită a dreptei este $y = mx + n$;

i) Distanța de la un punct la o dreaptă:

$$M(x_0, y_0) \text{ şi } d: ax + by + c = 0 \Rightarrow d(M_0, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

j) Aria triunghiului ABC este $S = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

- Condiția de paralelism a două drepte: $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$ şi $n_1 \neq n_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;
- Condiția de perpendicularitate a două drepte: $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$;
- Condiția ca două drepte să fie concurente: $m_1 \neq m_2$;
- Condiția de coliniaritate a 3 puncte: A, B, C coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

III. Trigonometrie

- **Funcții trigonometrice**: $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$; $g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $g(x) = \cos x$.

Proprietăți:

a) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$; $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$;

b) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$;

c) $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$; $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$; $\forall\ k \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R}$;

d) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$; $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Dacă $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}; x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, $ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}; x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci:

e) $tg(-\alpha) = -tg\ \alpha$; $ctg(-\alpha) = -ctg\ \alpha$, $\forall\ \alpha \in$ domeniului;

f) $tg\ \alpha \cdot ctg\ \alpha = 1$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ pentru care $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \neq 0$;

g) $tg(\alpha + k\pi) = tg\ \alpha$; $ctg(\alpha + k\pi) = ctg\ \alpha$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$.

- **Reducerea la primul cadran**

  a) $\sin(\pi - x) = \sin x$; $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$;

  b) $\sin(\pi + x) = -\sin x$; $\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$;

  c) $\sin(2\pi - x) = -\sin x$; $\cos(2\pi - x) = \cos x$; $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

- **Formule trigonometrice**:

  $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$;

  $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$;

  $tg(a \pm b) = \frac{tga \pm tgb}{1 \mp tgatgb}$;

  $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$;

  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$;

  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$;

  $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$;

  Dacă $tg\frac{\alpha}{2} = t \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}; \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$;

  $\sin a \pm \sin b = 2\sin\frac{a \pm b}{2}\cos\frac{a \mp b}{2}$;

  $\cos + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$;

  $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$.

- **Aplicațiile trigonometriei în geometrie**

  În triunghiul ABC notăm $|AB| = c$; $|AC| = b$; $|BC| = a$ şi $m(\measuredangle A) = A$, $m(\measuredangle B) = B$, $m(\measuredangle C) = C$

  a) Teorema sinusurilor: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, R este raza cercului circumscris triunghiului;

  b) Teorema cosinusului: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$;

  c) Formule pentru aria unui triunghi:

  $S = \frac{a \cdot h_a}{2}; S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S}; S = \frac{ab\sin C}{2}; S = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S}{p}$, r = raza cercului înscris în triunghi; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

CLASA a X-a

I. Puteri cu exponent natural

Definiție. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Atunci $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n}$.

a^n = putere; a = baza puterii; n = exponentul puterii.

Convenție: $a^0 = 1$, $a \neq 0$; 0^0 nu are sens; $a^1 = a$.

Puteri cu exponent întreg negativ

Definiție. Fie $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, iar $a^{-1} = \frac{1}{a}$ reprezintă inversul lui a.

Puteri cu exponent rațional

Definiție. Fie $a > 0$ şi $r = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Atunci $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ iar $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Puteri cu exponent real

Proprietățile puterilor cu exponent real:

Fie $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$. Atunci:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; **2.** $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; **3.** $(ab)^x = a^x \cdot b^x$; **4.** $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$; **5.** $(a^x)^y = a^{xy}$.

II. Radicalul de ordin n

Definiție

1. Fie $a \geq 0$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, n par. Radicalul de ordin n din a (sau rădăcină de ordinul n din a) este numărul real pozitiv notat cu $\sqrt[n]{a}$, cu proprietățile: $\sqrt[n]{a} \geq 0, (\sqrt[n]{a})^n = a$.

2. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$, n impar. Radicalul de ordin n din a este numărul real notat cu $\sqrt[n]{a}$, cu proprietatea: $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Cazuri particulare:

1. Dacă $n = 2$, $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$, $a \geq 0$ şi se numeşte radical de ordin 2 din a sau rădăcină pătrată din a.

2. Dacă $n = 3$, $\sqrt[3]{a}$, $a \in \mathbb{R}$ şi se numeşte radical de ordin 3 din a sau rădăcină cubică din a.

Proprietăți ale radicalilor:

Nr.crt.	n, număr natural par, $n \geq 2$	n, număr natural impar, $n \geq 3$
1	$\sqrt[n]{ab}=\begin{cases}\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}, \forall a,b\geq 0\\ \sqrt[n]{\lvert a\rvert}\cdot\sqrt[n]{\lvert b\rvert}, a,b\leq 0\end{cases}$	$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}, \forall a,b\in\mathbb{R}$
2	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\begin{cases}\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \forall a,b\geq 0, b\neq 0\\ \frac{\sqrt[n]{\lvert a\rvert}}{\sqrt[n]{\lvert b\rvert}}, \forall a\cdot b\geq 0, b\neq 0\end{cases}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \forall a,b\in\mathbb{R}, b\neq 0$
3	$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}, \forall a\geq 0, m\in\mathbb{N}^*$	$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}, \forall a,b\in\mathbb{R}, m\in\mathbb{N}^*$
4	$\sqrt[mn]{a^m}=\begin{cases}\sqrt[n]{a}, a\geq 0, m\in\mathbb{N}^*\\ \sqrt[n]{\lvert a\rvert}, a<0, m\,\text{par}\end{cases}$	$\sqrt[mn]{a^m}=\sqrt[n]{a}, \forall a\in\mathbb{R}, m\,\text{impar}$
5	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}, \forall a\geq 0, m\in\mathbb{N}^*, m\geq 2$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}, \forall a\in\mathbb{R}, m\in\mathbb{N}^*, m\,\text{impar}$
6	$a\cdot\sqrt[2n]{b}=\begin{cases}\sqrt[2n]{a^{2n}b}, a\geq 0, b\geq 0\\ -\sqrt[2n]{a^{2n}b}, a<0, b\geq 0\end{cases}$	$a\cdot\sqrt[2n+1]{b}=\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}b}, \forall a,b\in\mathbb{R}$
7	$\sqrt[2n]{a^{2n}b}=\begin{cases}a\cdot\sqrt[2n]{b}, a\geq 0, b\geq 0\\ -a\cdot\sqrt[2n]{b}, a<0, b\geq 0\end{cases}$	$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}\cdot b}=a\cdot\sqrt[2n+1]{b}, \forall a,b\in\mathbb{R}$
8	Pentru a, b > 0 are loc echivalența: $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}\Leftrightarrow a<b$	Pentru $a, b\in\mathbb{R}$ are loc echivalența: $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}\Leftrightarrow a<b$

Raționalizarea numitorului (se presupune că au sens radicalii de mai jos):

Tipul numitorului	**Conjugata**	**Rezultatul de la numitor**
$\frac{1}{\sqrt[n]{a^k}}$	$\sqrt[n]{a^{n-k}}$	$\frac{1}{\sqrt[n]{a^k}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{a}$
$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$	$\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$	$(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})=a-b$
$\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$	$(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})\cdot(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a\pm b$
$\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$	
$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}}\cdot\sqrt[n]{b}+...+\sqrt[n]{b^{n-1}}$	$(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})\cdot(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}}\cdot\sqrt[n]{b}+...+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b$
$\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}}\cdot\sqrt[n]{b}+...+\sqrt[n]{b^{n-1}}$	$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$	

III. Logaritmi

Definiție: Fie $a > 0$, $a \neq 1$ şi $x > 0$. Atunci: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ sau $a^{\log_a x} = x$.

Condiții de existență pentru logaritmi: $\log_{g(x)} f(x)$ are sens dacă $\begin{cases}f(x)>0\\ g(x)>0\\ g(x)\neq 1\end{cases}$.

Proprietățile logaritmilor:

1. $\log_a 1 = 0$ şi $\log_a a = 1$, $\forall\ a > 0, a \neq 1$;

2. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$, $\forall\ x, y > 0$ şi $a > 0, a \neq 1$;

Generalizare: $\log_a(x_1 x_2 ... x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + ... + \log_a x_n$, $\forall\ x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ şi $\forall\ a > 0, a \neq 1$;

3. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$, $\forall\ x, y > 0$ şi $a > 0, a \neq 1$;

Consecință: $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$, $\forall\ x > 0$ şi $a > 0, a \neq 1$;

4. $\log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x$, $\forall\ x > 0, a > 0, a \neq 1$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$;

5. ***Formula de schimbare a bazei***: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, $\forall\ x > 0$ şi $\forall\ a, b > 0, a, b \neq 1$.

Consecință: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $\forall\ a, b > 0, a, b \neq 1$.

6. $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$, $\forall\ a, b, c > 0, a \neq 1$.

IV. Forma algebrică a unui număr complex

Mulțimea numerelor complexe: $\mathbb{C} = \{z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$

Mulțimea numerelor complexe pur imaginare: $\mathbb{R}^*i = \{z = bi \mid b \in \mathbb{R}^*\}$

Unitatea imaginară: $i^2 = -1$

Forma algebrică a unui număr complex: $z = a + bi$,

unde $a = \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ = partea reală a numărului complex z;

bi = partea imaginară a numărului complex z;

$b = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$ = coeficientul părții imaginare

Puterile lui i: pentru $k \in \mathbb{N}$ avem: $i^{4k} = 1$

$i^{4k+1} = i$

$i^{4k+2} = -1$

$i^{4k+3} = -i$

Egalitatea a două numere complexe: $a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$

Numere complexe conjugate

Definiție. Fie $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Atunci numărul complex $\overline{z} = a - bi$ se numeşte ***conjugatul*** lui z.

Proprietăți:

1. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$; $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \geq 0$, $\forall\ z \in \mathbb{C}, z = a + bi$;

2. $\overline{\overline{z}} = z$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$;

3. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\forall\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

Generalizare: $\overline{z_1 + z_2 + ... + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + ... + \overline{z_n}$, $\forall\ z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$;

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x$.

a) Arătați că $f'(x) = 2x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^2}$.

c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$.

a) Arătați că $\int_1^e \dfrac{1}{x} dx = 1$.

b) Arătați că funcția $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + \ln x + 2$ este o primitivă a funcției f.

c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficului funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuații $x = 1$ şi $x = 2$ are aria mai mică strict decât 4.

Cuprins