Artur Bălăucă

Adrian Boţan **Cătălin Budeanu** **Ioan Ciobanaşu**

Gabriel Mîrşanu **Mariana Ciobanaşu**

19
EDIŢII ALE CONCURSULUI INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „DIMITRIE POMPEIU“ BOTOŞANI
(2001 – 2019)

CLASELE III - XI

502 probleme

Editura TAIDA
– 2021, IAŞI –

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN „DIMITRIE POMPEIU”

EDIȚIA I – 2 iunie 2001

CLASA a V-a

1. La o împărţire de numere naturale, suma dintre împărţitor, cât şi rest este egală cu deîmpărţitul. Să se arate că împărţitorul este egal cu câtul.

2. Să se determine un număr impar de numere naturale consecutive a căror sumă este 2001.

3. Fie numerele naturale a şi b astfel încât $a < b$. Să se arate că $a^{n+1} + b^n \le a^n + b^{n+1}$, oricare ar fi $n \in N^*$.

CLASA a VI-a

4. Fie triunghiul $\triangle ABC$ cu măsurile unghiurilor direct proporţionale cu numerele 2, 4 şi 6 $\left(\sphericalangle A > \sphericalangle B > \sphericalangle C\right)$. Dacă M este simetricul vârfului A faţă de dreapta BC, iar bisectoarea unghiului $\angle BMC$ intersectează dreapta AB în N, să se demonstreze că $AM \equiv AN$ şi să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului MNC.

5. a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia:

$$3xy + 2x = 5y + 1.$$

b) Să se arate că pentru orice număr natural nenul n are loc inegalitatea: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} \ge \frac{5}{6}$.

6. Arătaţi că nu există trei numere naturale prime astfel încât adunându-le două câte două să se obţină sume ce au 2, 3 şi, respectiv, 5 divizori naturali.

EDIŢIA a IX-a, 15-17 mai 2009

CLASA a V-a

115. a) În fiecare anotimp, Lucia vizionează un alt gen de film şi ascultă un alt gen de muzică. Se ştie că: **1)** Lucia nu ascultă vara muzică simfonică, dar urmăreşte filme de acţiune; **2)** Primăvara, Lucia ascultă muzică disco şi nu urmăreşte comedii; **3)** Toamna, Lucia nu ascultă muzică rock şi nu urmăreşte desene animate; **4)** În anotimpul în care urmăreşte filme istorice, Lucia ascultă muzică simfonică; **5)** Lucia nu ascultă muzică populară nici iarna, nici vara. Precizaţi ce gen de muzică şi ce fel de filme preferă Lucia în fiecare anotimp. *(Gazeta Matematică)*

b) Aflaţi numerele naturale x, y, z ştiind că: $2xy + 11z = 44$. (*Maria Sas*)

116. a) Considerăm toţi multiplii lui 5 în baza zece, începând cu 0, în ordine crescătoare. Al câtelea număr este cel mai mic dintre aceştia, având suma cifrelor egală cu 45? (***)

b) Determinaţi mulţimile A, B, C care îndeplinesc simultan, condiţiile: **a.** $A \cap B \cap C = \{1, 2, 3\}$; **b.** $B \cup C = \{2\}$; **c.** $C \setminus B = \emptyset$; **d.** $B \setminus \{3\} = B \setminus A$. (*Ionuţ Dimitriu*)

117. Avem vase de 12 *l*, de 16 *l*, de 25 *l*, în total 45 de vase în care încap 697 *l* de apă. Ştiind că numărul celor de 12 *l* este cu 4 mai mic ca triplul celor de 16 *l*, să se afle câte vase sunt din fiecare fel. (***)

118. PROBLEMA SUPLIMENTARĂ

Divizorii numărului $N = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ sunt scrişi în ordine crescătoare: $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$ etc. Să se spună cine este d_{51}. *(Dan Brânzei)*

CLASA a VI-a

119. a) Fie numerele a şi b astfel încât: $a = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{2007}$ şi $b = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{2007}$. Comparaţi numerele $(a + 1)^3$ şi $(2b + 1)^2$. *(Gazeta Matematică)*

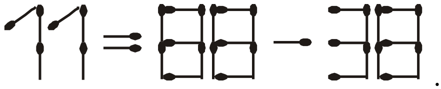
b) Să se afle $n \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul $\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2008}{3^n}$ să fie număr natural şi să aibă cea mai mică valoare posibilă. *(Gazeta Matematică)*

EDIȚIA a XIV-a, 9-11 mai 2014
Clasa a III-a

287. a) Câți termeni are suma 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ..., dacă valoarea ei este un număr natural format din două cifre identice?

(Gazeta Matematică, 1/2014)

b) Mută două chibrituri pentru a obține egalitate:



288. Amfiteatrul școlii în care învață Gigel are 7 rânduri cu același număr de scaune numerotate de la stânga la dreapta. Știind că Gigel stă pe rândul din mijloc, pe scaunul cu numărul 45, iar în dreptul lui, pe ultimul rând, pe scaunul cu numărul 81 stă Costel, aflați câte scaune sunt în amfiteatrul școlii. *(Cătălin Budeanu)*

b) Greierașul și Furnicuța, aflați la distanța de 10 metri față de scorbura în care se adăpostesc se îndreaptă spre aceasta. Greierașul merge 2 metri într-o oră, iar Furnicuța merge de 8 ori mai repede ca Greierașul care mai și cântă. Furnicuța ajunge la adăpost, apoi se întoarce până întâlnește Greierașul și repetă plimbarea până ajung împreună la adăpost. Câți metri a parcurs Furnicuța cea harnică în total? *(Artur Bălăucă)*

289. Victor îi zice lui Dragoș:

„Dă-mi 500 de lei și vom avea amândoi aceeași sumă."

Dragoș răspunde:

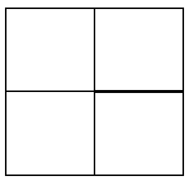
„Dă-mi tu mie 1000 de lei și voi avea de patru ori mai mulți bani decât suma ce-ți rămâne ție."

Ce sumă avea fiecare copil?

290. PROBLEMĂ SUPLIMENTARĂ

Fiecare dintre pătrățelele din figura alăturată pot fi colorate cu negru sau cu roșu. Câte modele diferite se pot obține?

(Mariana Ciobanașu)



EDIŢIA a XIX-a, 11-13 mai 2019

Clasa a III-a

467. Alina are de şase ori mai mulţi bani decât jumătate din suma de bani pe care o are Mihnea. Ce sumă de bani are fiecare dacă Alina are cu 200 de lei mai mult decât Mihnea? *(xxx)*

468. a) Dacă înaintea unui număr de o cifră scriem cifra 4, numărul obţinut este cu 9 mai mic decât numărul care se obţine dacă scriem cifra 4 la sfârşitul lui. Care este acel număr?
b) Care este numărul format din trei cifre consecutive care adunat cu răsturnatul său dă 888? *(G.M. Nr. 1/2019)*

469. Ştefan şi-a propus să rezolve 150 de probleme. În prima zi a rezolvat două probleme, în a doua zi a rezolvat cu trei probleme mai multe, în a treia zi a rezolvat cu trei probleme mai multe decât în a doua zi, şi tot aşa, în fiecare zi a rezolvat cu trei probleme mai multe decât în ziua precedentă, până când a terminat de rezolvat cele 150 de probleme.
a) Câte probleme a rezolvat Ştefan în total în primele 6 zile?
b) În câte zile a terminat de rezolvat cele 150 de probleme şi câte probleme a rezolvat în ultima zi? *(xxx)*

470. Cheile de la Pensiune. Proprietarul unei pensiuni conduce 10 familii la camerele lor, ale căror numere sunt de la 1 la 10. Din păcate cheile nu sunt numerotate, iar proprietarul a încurcat ordinea lor. Care este numărul maxim de încercări pe care trebuie să le facă proprietarul pentru a deschide toate uşile? *(xxx)*

Clasa a IV-a

471. Ioana, Maria şi Dana şi-au propus să amenajeze o grădină de flori. Lucrând fiecare singură, Ioana ar termina în 4 ore, Maria în 6 ore, iar Dana în 12 ore. În câte ore s-ar termina lucrarea dacă ar lucra împreună toate trei? *(G.M. Nr. 1/2019)*

486. Problema suplimentară. Punctele M, N, P aparțin, respectiv, laturilor BC, AB, AC ale triunghiului ABC dreptunghic în A. Fie punctul E simetricul punctului M față de dreapta AB și punctul F simetricul lui M față de dreapta AC. Să se arate că:

a) $EF = 2AM$.

b) Perimetrul triunghiului MNP este mai mare decât dublul segmentului AM. *(xxx)*

Clasa a VIII-a

487. a) Aflați numerele întregi x, y, z care verifică relațiile:

$$xy + yz + xz = x + y + z = 4.$$

b) Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația: $3^{2x} + 4^{2x} + 5^{2x} = 4^x \cdot 3^x + 5^x \cdot 3^x + 4^x \cdot 5^x$.

(G.M. 10/2018, Adrian Bud)

488. a) Arătați că $\sqrt{m^2+n^2}+\sqrt{p^2+q^2} \geq \sqrt{(m+p)^2+(n+q)^2}$, oricare ar fi numerele reale m, n, p, q.

b) Fie numerele reale pozitive a, b, c cu $a \cdot b \cdot c = 1$.

Arătați că $\sqrt{2a^2+4b^2}+\sqrt{2b^2+4c^2}+\sqrt{2c^2+4a^2} \geq 3\sqrt{6}$.

(Artur Bălăucă)

489. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$.

a) Dacă punctele E, F, G sunt proiecțiile vârfului A pe dreptele $A'B$, $A'C$ și, respectiv, $A'D$, arătați că $A'C \perp (EFG)$.

b) Arătați că punctele E, F, G, A sunt coplanare.

c) Calculați sinusul unghiului format de planele (ABC) și (EFG).

(Cătălin Budeanu)

490. Problema suplimentară. Centrul unui oraș reprezintă un pătrat de dimensiuni 5 km × 5 km, format din 25 de pătrate de dimensiuni 1 km × 1 km, delimitate de străzi care formează 36 de intersecții. Care este numărul cel mai mic de polițiști care trebuie plasați în intersecții, astfel încât până la fiecare intersecție să ajungă un polițist parcurgând cu mașina cel mult 2 km?

(Olimpiadele rusești)

Clasa a IX-a

491. Într-un paralelogram $ABCD$ notăm mijloacele laturilor BC şi CD cu M, respectiv P. Ştiind că $AM = BP$ şi AM u BP demonstraţi că $ABCD$ este pătrat. *(Gazeta Matematică)*

492. Fie funcția $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ care verifică următoarele condiții: **(a)** $x\big(f(x+1)-f(x)\big)=f(x)$, pentru orice x Q 0;
(b) funcția $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x+1) - f(x)$ este crescătoare.

Să se arate că există un număr k Q 0, astfel încât $f(x) = kx$, pentru orice x Q 0. *(Vladimir Cerbu, Mihai Piticari)*

493. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ numere reale din intervalul $[1; 3]$. Știind că $x_1 + x_2 + \ldots + x_{100} = 120$ şi $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{100}^2=180$, arătați că $x_1^3+x_2^3+\ldots+x_{100}^3=360$. *(xxx)*

494. Problema suplimentară. Fie a, n, p trei numere naturale cu a U 2, n U 2 și p număr prim.

Să se arate că fracția $\dfrac{a^n-1}{a^{p-1}+a^{p-2}+\ldots+a^2+a+1}$ este reductibilă dacă și numai dacă p divide n sau p divide $a-1$. *(xxx)*

Clasa a X-a

495. Fie a şi b numere complexe şi k un număr întreg nenul astfel încât $|a+k|+|b-k|+|a+b-k|=1$. Demonstraţi că a şi b sunt numere reale. *(Gazeta Matematică)*

496. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\sqrt{\left(2^x+\lg 2\right)\left(2^{-x}+\lg 2\right)}+\sqrt{\left(2^x+\lg 5\right)\left(2^{-x}+\lg 5\right)}=3.$$

(xxx)

SOLUŢII, INDICAŢII, RĂSPUNSURI, COMENTARII

1. Fie I, C, R, D împărţitorul, câtul, restul şi, respectiv, deîmpărţitul. Din relaţiile $D = I \cdot C + R$, $R < I$ şi $I + C + R = D$ rezultă $I + C = I \cdot C$, de unde $I(C-1) = C$, adică $C-1/\,C$ sau $C-1/\,(C-1) + 1$, $C-1/1 \Rightarrow C = 2$ şi $I = 2$.

2. Fie $n + 1$, $n + 2$, …, $n + (2k + 1)$ numerele consecutive. Avem: $(n + 1) + (n + 2) + \ldots + (n + 2k + 1) = 2001 \Rightarrow \underbrace{n + n + \ldots + n}_{2k+1 \text{ termeni}} + 1 + 2 + \ldots + (2k + 1) = (2k + 1)n + \dfrac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k + 1) \cdot (n + k + 1) = 2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29 \Rightarrow 2k + 1 \in \{1, 3, 23, 29, 69, 87, 667, 2001\}$. Se obţine soluţie pentru $2k + 1 \in \{3, 23, 29\}$. Numerele sunt: 666, 667, 668 sau 76, 77,…, 98 sau 55, 56, …,83.

3. $a^{n+1} + b^n \leq a^n + b^{n+1} \Leftrightarrow a^n(a-1) \leq b^n(b-1)$; $a = 0$ şi $b = 1 \Rightarrow a^{n+1} + b^n = a^n + b^{n+1}$. Dacă $a = 0$ şi $b > 1 \Rightarrow b^n(b - 1) > 0$ şi $a^n(a - 1) = 0$ etc. Dacă $a = 1$ atunci $b \geq 2$ şi $b^n(b - 1) > 0$, iar $a^n(a - 1) = 0$ etc. Dacă $a > 1$, cum $b > a$ rezultă $b^n > a^n$ şi $b - 1 > a - 1$ etc.

4. $m(\angle A) = 90^0$, $m(\angle B) = 60^0$, $m(\angle C) = 30^0$. În triunghiul $\triangle AMN$, $m(\angle AMN) = m(\angle ANM) = 15°$. Triunghiul ANC este dreptunghic isoscel, $m(\angle NMC) = 45°$, $m(\angle MNC) = 30°$, $m(\angle MCN) = 150°$.

5. **a)** $3xy + 2x = 5y + 1 \Leftrightarrow x(3y + 2) = 5y + 1 \Leftrightarrow 3x(3y + 2) = 5 \cdot 3y + 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x(3y + 2) = 5(3y + 2) - 7$. Deci $3y + 2\,/7$, de unde $3y + 2 \in \{-7; -1; 1; 7\}$, etc.

b) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n} \geq \dfrac{5}{6} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}\right) + \left(\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n}\right) \geq \dfrac{5}{6}$.

$\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} \geq \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$ şi $\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n} \geq \dfrac{n}{3n} = \dfrac{1}{3}$ etc.

6. Presupunem că există numerele a, b, c ($a \leq b$) cu proprietatea din enunţ. Dacă $a + b$ are 2 divizori, atunci $a + b$ este prim şi $a = 2$, iar b este impar.

I. Dacă $a + c$ are 3 divizori şi $b+c$ are 5 divizori, atunci $a + c = q^2$, q prim şi $b + c = p^4$, p prim, de unde rezultă $c = 2$, contradicţie pentru că $c > 2$.

II. Dacă $a + c$ are 5 divizori şi $b + c$ are 3 divizori, atunci $a + c = m^4$, m prim şi $b + c = n^2$, n prim, de unde $c = 2$, contradicţie pentru că $c > 2$.

7. $x + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2001 \Leftrightarrow \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2001 - x \in \mathbb{Z}$; $y, z \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow |z| \geq 1$ şi $|y| \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{|z|} \leq 1$ şi $\dfrac{1}{|y|} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \leq 2$ şi $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

258. Putem așeza numerele: 11, 12, 13, …, 65, 66 în tabloul:

$$\left.\begin{array}{cccc} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 18 & 17 & 16 & 15 \\ 19 & 20 & 21 & 22 \\ 26 & 25 & 24 & 23 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 59 & 60 & 61 & 62 \\ 66 & 65 & 64 & 63 \end{array}\right\} \text{14 linii și 4 coloane.}$$

a) Cele patru grupe de plăcuțe pot avea lungimile exprimate în centimetri prin numerele de pe fiecare coloană a tabloului.

b) Lungimea fiecărei scânduri este egală cu: $(11 + 12 + 13 + \ldots + 66) : 4 = [(1 + 2 + 3 + \ldots + 66) - (1 + 2 + 3 + \ldots + 10)] : 4 = [(66 \cdot 67) : 2 - (10 \cdot 11) : 2] : 4 = (2211 - 55) : 4 = 2156 : 4 = 539$ cm.

c) Putem realiza tabloul cu numerele:

11	12	13	14	15	16	17
24	23	22	21	20	19	18
25	26	27	28	29	30	31
38	37	36	35	34	33	32
39	40	41	42	43	44	45
52	51	50	49	48	47	46
53	54	55	56	57	58	59
66	65	64	63	62	61	60.

Cele șapte grupe pot conține, respectiv, numerele de pe fiecare coloană a tabloului. Lungimea fiecărei scânduri este egală cu: $(11 + 12 + \ldots + 66) : 7 = 2156 : 7 = 308$ cm.

sau

$11 + 24 + 25 + 38 + 39 + 52 + 53 + 66 = (11 + 66) + (24 + 53) + (25 + 52) + (38 + 39) = 77 \cdot 4 = 308$.

259. a) Se observă că $n > 0$ și a este cifră pară nenulă. (1p)

Cazul $a = 2$ implică $n \le 9$. Ultimele două cifre ale numărului a^n trebuie să fie 1 și 2 în această ordine, deci $n = 9$, adică $a^n = 512$. $a = 2$, $n = 9$, $b = 1$ și $c = 5$, soluție. (1p)

Cazul $a = 4$ conduce la $2012 = 4^n + \overline{bc00} = 2^{2n} + \overline{bc00}$, de unde $2n = 9$, contradicție!

Cazul $a = 6$, implică $n < 4$. Însă 6^1, 6^2, 6^3 nu au ultimele două cifre 1 și 2, în această ordine. (1p)

Cazul $a = 8$. $2012 = (2^3)^3 + \overline{bc00}$, de unde $n = 3$ și $b = 1$, $c = 5$, soluție.

Prin urmare, $(a, n, b, c) \in \{(2, 9, 1, 5), (8, 3, 1, 5)\}$. (1p)

Un pătrat de arie 2m^2 poate fi așezat ca în **figura 81 a)** pe fața superioară a cubului și pe câte un sfert din fețele vecine cu ea (vârfurile pătratului să coincidă cu centrele celor 4 fețe laterale ale cubului).
Analog se așază un pătrat cu aria 2 m^2 pe fața inferioară și pe câte un sfert din fețele laterale ale cubului.
Fiecare din cele 4 regiuni rămase (**figura 81 b)**) neacoperite poate fi acoperită cu câte un pătrat cu aria de $\frac{1}{2}$ m^2.
Deci nu e obligatoriu ca toate cele șase pătrate să fie identice.

455. Pentru $x = 0$, egalitatea ne dă: $[a_1] + [a_2] + \ldots + [a_n] = 0$.
Apoi: bx S $[bx] = [x + a_1] + [x + a_2] + \ldots + [x + a_n]$ Q $x + a_1 - 1 +$
$+ x + a_2 - 1 + \ldots + x + a_n - 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Deducem: $(b - n)x$ Q $a_1 + a_2 + \ldots + a_n - n, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Dacă $(b - n)$ @ 0,
găsim x Q c sau x P c, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde c este constanta $\frac{a_1 + \ldots + a_n - n}{b - n}$,
absurd. Deci $b = n$. Avem $[x + a_1] = [x + \{a_1\}] + [a_1]$ și analoagele și folosind și $[a_1] + \ldots + [a_n] = 0$, deducem că:
$[x + \{a_1\}] + [x + \{a_2\}] + \ldots + [x + \{a_n\}] = [nx], \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Schimbând eventual indicii numerelor $\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_n\}$ putem presupune că: $\{a_1\}$ R $\{a_2\}$ R …, R $\{a_n\}$.
Notăm $\{a_k\} = E_k$ cu k g $\{1; 2; \ldots; n\}$ și avem: 0 R E_1 R E_2 R … R E_n P 1, iar $[x + E_1] + \ldots + [x + E_n] = [nx]$.
Folosind *identitatea lui Hermite*, găsim:
$$[x + E_1] + [x + E_2] + \ldots + [x + E_n] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right].$$
Dacă $E_n < \frac{n-1}{n}$ sau $E_n > \frac{n-1}{n}$, luând $x = 1 - \max\left(E_n, \frac{n-1}{n}\right)$ în relația anterioară, unul din membri este 0, celălalt este mai mare sau egal cu 1, absurd. Deci $E_n = \frac{n-1}{n}$. Același raționament ne va da: $E_{n-1} = \frac{n-2}{n}$, apoi
$E_{n-2} = \frac{n-3}{n}, \ldots, E_2 = \frac{1}{n}$ și $E_1 = 0$.

456. a) Fie $x_l = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{2l}} = m^2$, cu $m \in \mathbb{N}$ și $x_k = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{2l} a_{2l+1} \ldots a_{2k}} =$
$= m^2 \cdot 10^{2(k-l)} + \overline{a_{2l+1} \ldots a_{2k}} > (m \cdot 10^{k-l})^2$.
Cum x_k este pătrat perfect 1 x_k S $(m \cdot 10^{k-l} + 1)^2$ Q $m^2 \cdot 10^{2k-2l} +$

că $x_n < 1$ și notând $y_n = \left[\dfrac{1}{x_n}\right]$, avem $y_n \in \mathbb{N}^*$ și $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Avem $y_n \le \dfrac{1}{x_n} < y_n + 1$, **(1)** $\Rightarrow \dfrac{1}{y_n+1} < x_n < \dfrac{1}{y_n} \overset{f \text{ crescătoare}}{\Longrightarrow} f\left(\dfrac{1}{y_n+1}\right) \le f(x_n) \le$ $\le f\left(\dfrac{1}{y_n}\right)$, **(2)**. Înmulțind **(1)** și **(2)** $\Rightarrow y_n \cdot f\left(\dfrac{1}{y_n+1}\right) \le \dfrac{f(x_n)}{x_n} \le (y_n + 1) \cdot$ $\cdot f\left(\dfrac{1}{y_n}\right)$, **(3)**. Șirurile de numere naturale (y_n) și $(y_n + 1)$ au limita $+\infty$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n+1)\cdot f\left(\dfrac{1}{y_n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n \cdot f\left(\dfrac{1}{y_n}\right) = 1$.

Obținem $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \cdot f\left(\dfrac{1}{y_n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}(y_n+1)\cdot f\left(\dfrac{1}{y_n}\right) = 1$ și conform cu **(3)** găsim $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)}{x_n} = 1$, de unde $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)}{x} = 1$.

501. a) i) Dacă ℓ = finit, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)\cdot f(x+1)}{x\cdot f(x)} = \dfrac{\ell}{\ell} = 1$.

ii) Dacă $\ell = +\infty$ avem $g(x) = \dfrac{f(x+1)}{f(x)} \le 1$ (f fiind descrescătoare). Dar g este crescătoare $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \alpha \le 1$. Presupunem prin reducere la absurd că $\alpha < 1$. Cum g este crescătoare $\Rightarrow g(x) \le \alpha_1$, $\forall\ x > 0$. Considerăm un x_0 fixat și avem: $g(x_0) \cdot g(x_0 + 1) \cdot \ldots \cdot g(x_0 + n - 1) \le \alpha^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2 \Rightarrow \dfrac{f(x_0+1)}{f(x_0)}\cdot\dfrac{f(x_0+2)}{f(x_0+1)}\cdot\ldots\cdot\dfrac{f(x_0+n)}{f(x_0+n+1)} \le \alpha^n \Rightarrow f(x_0 + n) \le$

$\le \alpha^n \cdot f(x_0) \Rightarrow (x_0 + n) \cdot f(x_0 + n) \le (x_0 + n) \cdot \alpha^n \cdot f(x_0)$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty}(x_0+n)\cdot f(x_0+n) \le \lim\limits_{n\to\infty}(x_0+n)\cdot\alpha^n\cdot f(x_0) \Rightarrow \infty \le 0 \cdot f(x_0) \Rightarrow \infty \le 0$, ceea ce este absurd. Avem $\alpha \le 1$ și presupunerea $\alpha < 1$ este falsă $\Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha = 1$, adică $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)} = 1$. **b)** Răspunsul este negativ. Contra-

Cuprins